తెలంగాణ రాష్ట్ర విద్యామండలి
ఇంటర్మీడియట్ ప్రథమ సంవత్సరం

గణితశాస్త్రం-IA

(తెలుగు మీడియం)

ప్రాథమిక అభ్యసన దీపిక
(BASIC LEARNING MATERIAL)

విద్యా సంవత్సరం
2021-2022

Coordinating Committee

Sri Syed Omer Jaleel, IAS
Commissioner, Intermediate Education &
Secretary, Telangana State Board of Intermediate Education
Hyderabad

Dr. Md. Abdul Khaliq
Controller of Examinations
Telangana State Board of Intermediate Education

Educational Research and Training Wing

Ramana Rao Vudithyala
Reader

Mahendar Kumar Taduri
Assistant Professor

Vasundhara Devi Kanjarla
Assistant Professor

Learning Material Contributors

M. Vijaya Sekhar
J.L. in Maths, GJC,
BHEL, Dist. Rangareddy

D. Arundathi
J.L. in Maths, GJC,
Bhudan Pochampally
Dist. Yadadri Bhongiri

K. Srinivas
J.L. in Maths, GJC,
Shamshabad, Dist. Rangareddy

B. Roja Rani
J.L. in Maths, GJC,
Maheshwaram, Dist. Rangareddy

V. Aruna Kumari
J.L. in Maths, GJC,
Toopran, Dist. Medak

D. Srilatha
J.L. in Maths, RLD. GJC,
S.P. Road, Secunderabad

ప్రవేశిక

సమస్త ప్రపంచాన్ని అతలాకుతలం చేస్తూ ఉన్న కరోనా మహమ్మారి మన జీవితంలోని ప్రతి రంగాన్ని ప్రభావితం చేసింది. విద్యారంగం కూడా దానికి అతీతమేమీ కాదు. భౌతికంగా తరగతులను పూర్తిగా నిర్వహించడానికి వీలుకాని పరిస్థితుల్లో, తెలంగాణా ప్రభుత్వ ఇంటర్మీడియట్ విద్యాశాఖ దూరదర్శన్ పాఠాల ద్వారా విద్యను మారుమూల ప్రాంతాలకు సైతం అందించింది. కరోనా మహమ్మారి వల్ల తలెత్తిన ఈ సంక్షోభ పరిస్థితుల నేపథ్యంలో తెలంగాణ ఇంటర్మీడియట్ విద్యాశాఖ బోధనకూ మరియు పరీక్షలకూ కేవలం 70% సిలబస్ ను మాత్రమే పరిగణనలోకి తీసుకోవడం ద్వారా విద్యార్థులపై పాఠ్యప్రణాళికా భారాన్ని తగ్గించింది. విద్యార్థుల సౌకర్యార్థం వార్షిక పరీక్షల ప్రశ్నాపత్రాలలో గణనీయంగా ఛాయిస్‌ను పెంచింది.

విద్యార్థులు పరీక్షల భయాన్ని, ఒత్తిడిని తట్టుకుని ఇంత తక్కువ సమయంలో వార్షిక పరీక్షలను విజయవంతంగా ఎదుర్కోవడానికి తెలంగాణ రాష్ట్ర ఇంటర్మీడియట్ విద్యా శాఖ "ప్రాథమిక అభ్యసన దీపిక" (Basic Learning Material) ను రూపొందించింది. ఇది విద్యార్థులు పరీక్షలను ధైర్యంగా ఎదుర్కొనే ఒక కరదీపికగా పనిచేస్తుంది. ఇక్కడ గమనించాల్సిన విషయం ఏమిటంటే ఈ అభ్యసన దీపిక సమగ్రమైనది కాదు. అదెంత మాత్రమూ పాఠ్య పుస్తకానికి ప్రత్యామ్నాయం కాదు. నిజం చెప్పాలంటే ఇది విద్యార్థులు తమ వార్షిక పరీక్షలలో రాయాల్సిన సమాధానాలలోని అత్యావశ్యకమైన సోపానాలను అందించి వాటి ఆధారంగా తమ తమ సమాధానాలను మరింత మెరుగ్గా మార్చుకోవడానికి తోడ్పడుతుంది. మీరు మీ పాఠ్య పుస్తకాలను క్షుణ్ణంగా చదివిన తర్వాత ఈ అభ్యసన దీపికను చదివితే అప్పుడది పాఠ్య పుస్తకాల నుండి, ఉపాధ్యాయుల నుండి మీరు నేర్చుకున్న భావనలను, విషయాలను బలోపేతం చేయడంలో తోడ్పడుతుంది. అతి తక్కువ వ్యవధిలో ఈ అభ్యసన దీపికను మీ ముందుంచడంలో అహర్నిశలూ శ్రమించిన ERTW బృందాన్ని, విషయ నిపుణుల బృందాన్ని మనస్ఫూర్తిగా అభినందిస్తున్నాను.

ఈ అభ్యసన దీపికను మరింత సుసంపన్నం చేయడంలోనూ, ఏ అంశంలోనైనా ఒక్క లోపం కూడా లేకుండా ఈ దీపికను తీర్చిదిద్దడంలోను విద్యావ్యవస్థతో ముడిపడివున్న అందరి నుండీ సూచనలను, సలహాలను కోరుకొంటున్నాను.

ఈ అభ్యసన దీపికల్ని మన వెబ్‌సైట్ www.tsbie.cgg.gov.in ద్వారా పొందవచ్చు.

కమీషనర్ & సెక్రెటరీ

ఇంటర్మీడియట్ విద్యాశాఖ, తెలంగాణ

CONTENTS

యూనిట్ **1**

ప్రమేయాలు

ప్రమేయం: A,Bలు శూన్యేతర సమితులు A నుండి B కి f ఒక సంబంధం అనుకొందాం. A లోని ప్రతి a కి అనురూపంగా $(a,b) \in f$ అయ్యేటట్లు B లో ఒకే ఒక్క b వ్యవస్థితమయితే f ను A నుంచి B కి ప్రమేయం అంటాం. దీనిని $f : A \to B$ తో సూచిస్తాం. A ని f ప్రదేశం అని, B ని సహప్రదేశం అని అంటాం.

వ్యాప్తి: $f : A \to B$ ప్రమేయం అయితే A లోని అన్ని మూలకాల f –ప్రతిబింబాల సమితి $f(A)$ ని అంటే $f(A) = \{f(a) / a \in A\} \subseteq B$ ఇంకా $f(\mathrm{A}) = \{b \in B | A$ లోని ఒక a కి $f(a) = b\}$ ని వ్యాప్తి అంటాం.

అన్వేక లేదా ఏక–ఏక ప్రమేయం:

$f : A \to B$, A లోని విభిన్న మూలకాలకు Bలో విభిన్న f –ప్రతిబింబాలు ఉంటే, f ను అన్వేక ప్రమేయం అంటాం. ఈ అన్వేక ప్రమేయాన్ని ఏక–ఏక ప్రమేయం అని కూడా అంటాం.

$f : A \to B$ అన్వేకం $\Leftrightarrow a_1, a_2 \in \mathrm{A},\ a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

$\Leftrightarrow a_1, a_2 \in \mathrm{A}, f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

సంగ్రస్త ప్రమేయం:

$f : A \to B$ కి ప్రమేయం, f వ్యాప్తి, f సహప్రదేశం సమానం అయితే f ను సంగ్రస్త ప్రమేయం అంటాం.

ప్రమేయం $f : A \to B$ కి సంగ్రస్తం $\Leftrightarrow f$ వ్యాప్తి $= f(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$

$\Leftrightarrow \mathrm{B} = \{f(a) | a \in \mathrm{A}\}$

$\Leftrightarrow$ B లో ప్రతి b కీ, $f(a) = \mathrm{b}$ అయ్యేలా Aలో కనీసం ఒక a ఉంటుంది.

ద్విగుణ ప్రమేయం:

$f : A \to B$ అన్వేకం, సంగ్రస్తం రెండూ అయితే f ను A నుంచి B కి ద్విగుణ ప్రమేయం అంటాం.

ప్రమేయం $f : A \to B$ కి ద్విగుణం $\Leftrightarrow f$ అన్వేకం, సంగ్రస్తం

$\Leftrightarrow$ (i) $a_1, a_2 \in \mathrm{A},\ f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

(ii) B లో ప్రతీ b కి $f(a) = \mathrm{b}$ అయ్యేటట్లు A లో కనీసం ఒక 'a' వ్యవస్థితం

పరిమిత సమితి

A శూన్య సమితి లేదా A నుంచి {1,2,3...........n} సమితికి ద్విగుణ ప్రమేయం ఉండేలా N లో n మూలకాలు ఉంటే A ని పరిమిత సమితి అంటాం. అపుడు A లోని మూలకాల సంఖ్య n అని అంటాం. ఈ n ని $|A|$ లేదా n(A) తో సూచిస్తాం.

ప్రమేయాల సమానత్వం

f, g లు రెండు ప్రమేయాలు అనుకొందాం. f, g లు ఒకే ప్రదేశం పై నిర్వచితమై, f ప్రదేశంలోని ప్రతీ x కు $f(x) = g(x)$ అయితే f, g లు సమానం అంటాం. $f = g$ గా రాస్తాం.

స్థిర ప్రమేయం

$f : A \to B$ అనుకొందాం. f వ్యాప్తిలో ఒకే ఒక మూలకం ఉంటే f ను స్థిర ప్రమేయం అంటాం. A లోని ప్రతి a కు $f(x) = c$ అయ్యేలా ఒకే ఒక మూలకం $c \in$ B వ్యవస్థితం అయితే f ను c తో సూచిస్తాం.

తత్సమ ప్రమేయం:

A శూన్యేతర సమితి అనుకొందాం. A లోని ప్రతి x కి $f(x) = x$ గా నిర్వచిస్తే $f : A \to A$ ప్రమేయం. ఈ ప్రమేయాన్ని A మీద **తత్సమ** ప్రమేయం అంటాం. దీనిని I_A తో సూచిస్తాం.

అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. $f : \mathrm{R} \setminus \{0\} \to \mathrm{R}$ ను $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ గా నిర్వచిస్తే $\left(f(x)\right)^2 = f(x^2) + f(1)$ అని చూపండి.

సాధన: $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)$ కాబట్టి $f(x^2) + f(1) = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + \left(1 + \dfrac{1}{1}\right)$

$$= x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = \left[f(x)\right]^2$$

2. f ప్రమేయాన్ని $f(x) = \begin{cases} 3x - 2, x > 3 \\ x^2 - 2, -2 \le x \le 2 \\ 2x + 1, x < -3 \end{cases}$ గా నిర్వచిస్తే

(i) f (4), (ii) f (2.5), (iii) f (–2), (iv) f (–4), (v) f (0), (vi) f (–7) లను కనుక్కోండి.

సాధన: (i) $f(x) = 3x - 2, x > 3$ కాబట్టి $f(4) = 12 - 2 = 10$

(ii) f ప్రదేశంలో 2.5 లేదు కాబట్టి $f(2.5)$ నిర్వచితం కాలేదు.

(iii) $f(x) = x^2 - 2, -2 \le x \le 2$ కాబట్టి $f(-2) = (-2)^2 - 2 = 2$

(iv) $f(x) = 2x + 1, x < -3$ కాబట్టి $f(-4) = 2(-4) + 1 = -7$

(v) $f(x)=x^2-2,-2\le x\le 2$ కాబట్టి $f(0)=0^2-2=-2$

(vi) $f(x)=2x+1, x<-3$ కాబట్టి $f(-7) = 2(-7) + 1 = -13$

(3) $A=\left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right\}$, $f: A\rightarrow B$ సంగ్రస్తం అయి,

$f(x)=Cos(x)$ గా నిర్వచిస్తే B ని కనుక్కోండి.

సాధన: $f: A\rightarrow B$ సంగ్రస్తం, $f(x)=Cos(x)$ అయితే

$B=f$ వ్యాప్తి $=f(A)=\left\{f(0), f\left(\frac{\pi}{6}\right), f\left(\frac{\pi}{4}\right), f\left(\frac{\pi}{3}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}$

$=\left[\text{Cos}0, \text{Cos}\frac{\pi}{6}, \text{Cos}\frac{\pi}{4}, \text{Cos}\frac{\pi}{3}, \text{Cos}\frac{\pi}{2}\right]$

$=\left\{1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, 0\right\}$

4. $f(x)=\dfrac{Cos^2x+Sin^4x}{Sin^2x+Cos^4x}$ $\forall\, x\in R$ అయితే $f(2012)=1$ అని చూపించండి.

సాధన: $f(x)=\dfrac{Cos^2x+Sin^4x}{Sin^2x+Cos^4x}$

$$=\frac{1-Sin^2x+Sin^4x}{1-Cos^2x+Cos^4x}$$

$$=\frac{1-Sin^2x\ (1-Sin^2x)}{1-Cos^2x\ (1-Cos^2x)}$$

$$=\frac{1-Sin^2x\ \text{Cos}^2x}{1-Sin^2xCos^2x}$$

$f(x)=1$

$f(2012)=1$

5. $f(x)=\begin{cases} x+2, & x>1 \\ 2\,, & -1\le x\le 1 \\ x-1, & -3<x<-1 \end{cases}$ గా నిర్వచిస్తే కింది విలువలు కనుక్కోండి.

(i) $f(3)$ *(ii)* $f(0)$ *(iii)* $f(-1.5)$ *(iv)* $f(2)+f(-2)$ *(v)* $f(-5)$

సాధన: *(i)* $f(x) = x + 2, x > 1$ కాబట్టి $f(3) = 3 + 2 = 5$

(ii) $f(x) = 2, -1\le x\le 1$ కాబట్టి $f(0) = 2$

(iii) $f(x) = x-1, -3<x<-1$ కాబట్టి $f(-1.5) = -1.5-1 = -2.5$

(iv) $f(x) = x+2, x > 1$ కాబట్టి $f(2) = 2+2 = 4$

$f(x) = x-1, -3<x<-1$ కాబట్టి $f(-2) = -2-1 = -3$

$f(2) + f(-2) = 4 + (-3) = 4 - 3 = 1$

(v) f ప్రదేశంలో -5 లేదు కాబట్టి $f(-5)$ నిర్వచితం కాలేదు.

6. $f : R \setminus \{0\} \to R$ ను $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{x^3}$ గా నిర్వచిస్తే, $f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ అని చూపండి.

సాధన: $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{x^3}$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^3 - \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^3}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^3} - x^3$$

$$= f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3} - x^3 = 0$$

7. $f : R \to R$ ను $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ గా నిర్వచిస్తే, $f(\tan\theta) = Cos 2\theta$ అని చూపండి.

సాధన: $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

$$f(\tan\theta) = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{1-\dfrac{Sin^2\theta}{Cos^2\theta}}{1+\dfrac{Sin^2\theta}{Cos^2\theta}}$$

$$f(\tan\theta) = \frac{\dfrac{Cos^2\theta - Sin^2\theta}{Cos^2\theta}}{\dfrac{Cos^2\theta + Sin^2\theta}{Cos^2\theta}} = \frac{Cos^2\theta - Sin^2\theta}{Cos^2\theta + Sin^2\theta}$$

$$f(\tan\theta) = Cos^2\theta - Sin^2\theta = Cos 2\theta$$

8 $f : R \setminus [\pm 1] \to R$ ను $f(x) = \log\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$ గా నిర్వచిస్తే, $f\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) = 2f(x)$ అని చూపండి

సాధన: $f(x) = \log\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$

$$f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)=\log\left|\frac{1+\frac{2x}{1+x^2}}{1-\frac{2x}{1+x^2}}\right|$$

$$=\log\left|\frac{\frac{1+x^2+2x}{1+x^2}}{\frac{1+x^2-2x}{1+x^2}}\right|$$

$$=\log\left|\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}\right|$$

$$=\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|^2$$

$$=2\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

$$f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)=2f(x)$$

9. A = {-2, -1, 0, 1, 2} అయితే f : A $\rightarrow$ B సంగ్రస్త ప్రమేయం $f(x)=x^2+x+1$గా నిర్వచిస్తే B ని కనుక్కోండి.

సాధన: f : A $\rightarrow$ B సంగ్రస్త ప్రమేయం $\Rightarrow \forall\ b\in B\ \exists\ a\in A \ni f(a)=b$

A = {-2, -1, 0, 1, 2}

$f(x)=x^2+x+1$

$f(-2)=(-2)^2+(-2)+1\ \ =4-2=3$

$f(-1)=(-1)^2+(-1)+1=1$

$f(0)=(0)^2+(0)+1=1$

$f(1)=1^2+1+1=3$

$f(2)=(2)^2+2+1=7$

$\therefore\ B=\{1,3,7\}$

10. A = {1, 2, 3, 4} అయితే $f:\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{R}$ ను $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x+1}$గా నిర్వచిస్తే f వ్యాప్తి కనుక్కోండి.

సాధన: $f:\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{R}\Rightarrow f(\mathrm{A})=\mathrm{R}$

$$f(x)=\frac{x^2-x+1}{x+1}$$

$$f(1)=\frac{1^2-1+1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$f(2)=\frac{2^2-2+1}{2+1}=\frac{3}{3}=1$$

$$f(3)=\frac{3^2-3+1}{3+1}=\frac{7}{4}$$

$$f(4)=\frac{4^2-4+1}{4+1}=\frac{13}{5}$$

f వ్యాప్తి $=\left\{\frac{1}{2},1,\frac{7}{4},\frac{13}{5}\right\}$

11. $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ ను $f(x)=\dfrac{3^x+3^{-x}}{2}$ గా నిర్వచిస్తే $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ అని చూపండి.

సాధన: $f(x)=\dfrac{3^x+3^{-x}}{2}$, $f(y)=\dfrac{3^y+3^{-y}}{2}$

$$\text{LHS}\Rightarrow f(x+y)+f(x-y)=\frac{3^{(x+y)}+3^{-(x+y)}}{2}+\frac{3^{x-y}+3^{-(x-y)}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[3^{x+y}+3^{-(x+y)}+3^{(x-y)}+3^{-(x-y)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[3^x3^y+3^x3^{-y}+3^{-x}3^y+3^{-x}3^{-y}\right]$$

$$R\text{HS}\Rightarrow 2f(x)f(y)$$

$$=2\left(\frac{3^x+3^{-x}}{2}\right)\left(\frac{3^y+3^{-y}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(3^x+3^{-x}\right)\left(3^y+3^{-y}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(3^x3^y+3^x3^{-y}+3^{-x}3^y+3^{-x}3^{-y}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(3^{x+y}+3^{x-y}+3^{-(x-y)}+3^{-(x+y)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(3^{(x+y)}+3^{-(x+y)}+3^{(x-y)}+3^{-(x-y)}\right)$$

LHS = RHS

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

PRACTICE SUMS

1. $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ ను $f(x) = \dfrac{4^x}{4^x + 2}$ గా నిర్వచిస్తే $f(1-x) = 1 - f(x)$ అని చూపండి.

$f\left(\dfrac{1}{4}\right) + 2f\left(\dfrac{1}{2}\right) + f\left(\dfrac{3}{4}\right)$ విలువ రాబట్టండి.

వాస్తవ మూల్య ప్రమేయం:

X ఏదైనా శూన్యేతర సమితి అయితే $f: \mathrm{X} \to \mathrm{R}$ ను X మీద వాస్తవ మూల్య ప్రమేయం అంటాం.

12. కింది వాస్తవ మూల్య ప్రమేయాల ప్రదేశాలు కనుకోండి.

i) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2-1)(x+3)} \in \mathrm{R}$

సాధన: $\dfrac{1}{(x^2-1)(x+3)} \in \mathrm{R} \Rightarrow \dfrac{1}{(x+1)(x-1)(x+3)} \in \mathrm{R}$

$\Rightarrow (x+1)(x-1)(x+3) \neq 0 \Rightarrow x \neq -1, 1, -3,$

$\Rightarrow f$ ప్రదేశం $= \mathrm{R} \setminus \{1, -1, -3\}$

ii) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 7}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

సాధన: $\dfrac{2x^2 - 5x + 7}{(x-1)(x-2)(x-3)} \in R$

$\Rightarrow (x-1)(x-2)(x-3) \neq 0$

$\Rightarrow x \neq 1, 2, 3$

$\Rightarrow f$ ప్రదేశం $= R \setminus \{1, 2, 3\}$

iii) $f(x) = \dfrac{1}{\log(2-x)}$

సాధన: $\dfrac{1}{\log(2-x)} \in R$

$\Rightarrow (2-x) > 0$	$2 - x \neq 1$
$x - 2 < 0$	$-x \neq -1$
$x < 2$	$x \neq 1$

$\Rightarrow f$ ప్రదేశం $= (-\infty, 2) - \{1\}$

iv) $f(x) = |x-3|$

సాధన: $f(x) = |x-3|$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ if } x \ge 0 \\ -x \text{ if } x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |x-3| = \begin{cases} x-3 \text{ if } x-3 \ge 0 \\ -(x-3) \text{ if } x-3 < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f$ ప్రదేశం = R

v) $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$

సాధన: $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$

$\Leftrightarrow 4x - x^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x \le 0$

$\Leftrightarrow x(x-4) \le 0$

$\Leftrightarrow x \ge 0,\ x - 4 \le 0$

$\Rightarrow f$ ప్రదేశం = [0, 4]

vi) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\sqrt{1-x^2} > 0$

$\Rightarrow x^2 - 1 < 0$

$\Rightarrow (x+1)(x-1) < 0$

$\Rightarrow (x+1) > 0, (x-1) < 0$

$x > -1; x < 1$

$\Rightarrow f$ ప్రదేశం = (–1, 1)

13. కింది వాస్తవ మూల్య ప్రమేయాల వ్యాప్తులు కనుక్కోండి.

i) $\log|4 - x^2|$

సాధన: $f(x) = \log|4 - x^2|$

$f(x) = \log x$; వ్యాప్తి = $(-\infty, \infty)$

$f(x) = |x|$; వ్యాప్తి = $[0, \infty)$

$f(x) \in R \Rightarrow 4 - x^2 \ne 0,\ x^2 \ne 4,\ x \ne -2, 2$

f ప్రదేశం $= \mathrm{R} - \{-2, 2\}$, y «| ¾ $= \mathrm{R}$

ii) $f(x) = \sqrt{[x] - x}$

సాధన: $f(x) = \sqrt{[x] - x}$

$f(x) = [x] - x \geq 0$

$= [x] \geq x$

f ప్రదేశం = పూర్ణసంఖ్యలు Z, f వ్యాప్తి = $\{0\}$

iii) $f(x) = \dfrac{Sin\pi[x]}{1 + [x^2]}$

సాధన: $f(x) = \dfrac{Sin\pi[x]}{1 + [x^2]}$

$= 1 + [x^2] \neq 0$

f ప్రదేశం = R $[\because Sin\pi = 0]$

f వ్యాప్తి = $\{0\}$

iv) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

సాధన: $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

$x - 2 \neq 0$

$f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

$= \dfrac{(x+2)(x-2)}{(x-2)} = x + 2$

$f(x) \neq 2 + 2 = 4$

f ప్రదేశం = R – $\{2\}$

f వ్యాప్తి = R – $\{4\}$

PRACTICE PROBLEMS

I. క్రింది వాస్తవ మూల్య ప్రమేయాల ప్రదేశాలు కనుక్కోండి.

(i) $f(x) = \dfrac{3^x}{x + 1}$ Ans: R – $\{-1\}$

(ii) $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$ Ans: R – $(-5, 5)$

(iii) $f(x) = \sqrt{x - [x]}$ Ans: R

(iv) $f(x)=\sqrt{[x]-x}$ Ans: Z

(v) $f(x)=\dfrac{1}{6x-x^2+5}$ Ans: R – {1, 5}

(vi) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,(a>0)$ Ans: R – [–*a*, *a*]

(vii) $f(x)=\sqrt{(x+2)(x-3)}$ Ans: R – (–2, 3)

(viii) $f(x)=\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}\quad(0<\alpha<\beta)$ Ans: $x\in[\alpha,\beta]$

(ix) $f(x)=\sqrt{2-x}+\sqrt{1+x}$ Ans: [–1, 2]

(x) $f(x)=\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$ Ans: R – [–1, 2]

II. క్రింది వాస్తవ మూల్య ప్రమేయాల వ్యాప్తులు కనుక్కోండి.

(i) $\sqrt{9+x^2}$ Ans: $[3,\infty)$

దీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు

1) f = {(4,5), (5,6), (6,-4)}, g = {(4,-4), (6,5), (8,5)} అయితే

(i) $f+g$ (ii) $f-g$ (iii) $2f+4g$ (iv) $f+4$ (v) fg

(vi) f/g (vii) $|f|$ (viii) $\sqrt{f}$ (ix) f^2 (x) f^3 లు కనుక్కోండి.

సాధన: f ప్రదేశం A = {4, 5, 6}

g ప్రదేశం B = {4, 6, 8}

$f\pm g$ ప్రదేశం $A\cap B$ = [4, 6]

(i) $f+g=\{(4,5-4),(6,-4+5)\}=\{(4,1),(6,1)\}$

(ii) $f-g=\{(4,5+4),(6,-4-5)\}=\{(4,9),(6,-9)\}$

(iii) $2f$ ప్రదేశం A = {4, 5, 6}

$4g$ ప్రదేశం B = {4, 6, 8}

$\therefore\ 2f=\{(4,10),(5,12),(6,-8)\}$

$\therefore\ 4g=\{(4,-16),\ (6,20),\ (8,20)\}$

$2f+4g$ ప్రదేశం = {4, 6}

$2f+4g$ = {(4, 10–16), (6, –8+20)} = {(4, –6), (6, 12)}

(iv) $f+4$ ప్రదేశం A = {4, 5, 6}

$f+4$ = { (4, 5+4), (5, 6+4), (6, –4+4)}

= {(4, 9), (5, 10), (6,0)}

(v) fg ప్రదేశం $A\cap B$ = {4, 6}

$fg = \{(4, (5)(-4)), (6, (-4)(-5))\}$
$= \{(4, -20), (6, 20)\}$

(vi) $\frac{f}{g}$ ప్రదేశం $= \{4, 6\}$

$\therefore \frac{f}{g} = \left\{\left(4, \frac{-5}{4}\right), \left(6, \frac{-4}{5}\right)\right\}$

(vii) $|f|$ ప్రదేశం $A = \{4, 5, 6\}$
$|f| = \{(4, 5), (5, 6), (6, 4)\}$

(viii) $\sqrt{f}$ ప్రదేశం $= \{4, 5\}$

$\sqrt{f} = \{(4, \sqrt{5}), (5, \sqrt{6})\}$

(ix) f^2 ప్రదేశం $= A = \{4, 5, 6\}$
$f^2 = \{(4, 25), (5, 36), (6, 16)\}$

(x) f^3 ప్రదేశం $= A = \{4, 5, 6\}$
$f^3 = \{(4, 125), (5, 216), (6, -64)\}$

2) $f(x) = x^2,\ g(x) = |x|$ గా నిర్వచిస్తే కింది ప్రమేయాలను కనుక్కోండి.
(i) $f+g$ (ii) $f-g$ (iii) fg (iv) $2f$ (v) f^2 (vi) $f+3$

సాధన: $f(x) = x^2$

$$g(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

f ప్రదేశం $= g$ ప్రదేశం $= R$ కాబట్టి పై అన్ని ప్రమేయాల ప్రదేశం R.

(i) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + |x| = \begin{cases} x^2 + x, & x \geq 0 \\ x^2 - x, & x < 0 \end{cases}$

(ii) $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - |x| = \begin{cases} x^2 - x, & x > 0 \\ x^2 + x, & x < 0 \end{cases}$

(iii) $(fg)(x) = f(x)g(x) = x^2|x| = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ -x^3, & x < 0 \end{cases}$

(iv) $(2f)x = 2f(x) = 2x^2$

(v) $f^2(x) = (f(x))^2 = (x^2)^2 = x^4$

(vi) $(f+3)(x) = f(x) + 3 = x^2 + 3$

3) f, g వాస్తవ మూల్య ప్రమేయాలను $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = x^2$ గా నిర్వచిస్తే కింది వాటిని కనుక్కోండి.
(i) $(3f - 2g)(x)$ (ii) $(fg)(x)$ (iii) $\left(\frac{\sqrt{f}}{g}\right)(x)$ (iv) $(f + g + 2)(x)$ లు కనుక్కోండి.

సాధన: $f(x)=2x-1, \qquad g(x)=x^2$

$\Rightarrow (f-g)x = f(x)-g(x)$

(i) $(3f-2g)(x) = 3f(x)-2g(x) = 3(2x-1) - 2(x^2)$

$= 6x-3-2x^2$

$= -2x^2+6x-3$

$(3f-2g)\, x = -2x^2+6x-3$

(ii) $(fg)(x) = f(x).g(x)$

$= (2x-1)(x^2) = 2x^3-x^2$

(iii) $\left(\frac{\sqrt{f}}{g}\right)x = \frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)} = \frac{\sqrt{2x-1}}{x^2}$

(iv) $(f+g+2)x = f(x)+g(x)+2$

$= 2x-1+x^2+2$

$= x^2+2x+1 = (x+1)^2$

4) $f=\{(1,2),(2,-3),(3,-1)\}$ అయితే కింది వాటిని కనుక్కోండి.

(i) $2f$ (ii) $2+f$ (iii) $\sqrt{f}$ (iv) f^2

సాధన: $f=\{(1,2),(2,-3),(3,-1)\}$

f ప్రదేశం, A = {1, 2, 3}

(i) $2f = \{(1, 2\times2), (2, 2(-3)), (3, 2(-1))\} = \{(1,4), (2,-6), (3,-2)\}$

(ii) $2+f = \{(1, 2+2), (2, -3+2), (3, -1+2)\}$

$2+f = \{(1,4), (2,-1), (3,1)\}$

(iii) $\sqrt{f} = \{(1, \sqrt{2})\}$

(iv) $f^2 = \{(1, 2^2), (2,(-3)^2),(3,(-1)^2)\} = \{(1,4), (2,9), (3,1)\}$

❖❖❖❖❖

యూనిట్ **3**

మాత్రికలు

మాత్రిక:

దీర్ఘ చతురస్రాకారంగా ఏర్పరిచిన మూలకాల అమరికను మాత్రిక అంటారు.

ఉదా: $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 0 & -6\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}$

మాత్రిక తరగతి:

m అడ్డు వరుసలూ, n నిలువు వరుసలూ ఉన్న మాత్రిక తరగతి $m \times n$ అంటాం. దీనిని m బై n లేదా m క్రాస్ n అని చదువుతాం.

మాత్రిక రకాలు:

1. చతురస్ర మాత్రిక

అడ్డు వరుసల సంఖ్య, నిలువు వరుసల సంఖ్య సమానంగా గల మాత్రికను చతురస్ర మాత్రిక అంటాం.

ఉదా: $\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 4\end{bmatrix}_{2\times 2}$ $\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 4 & -1 & 2\\ 7 & 6 & 9\end{bmatrix}_{3\times 3}$

ప్రధాన వికర్ణం / వికర్ణం

$A=[a_{ij}]$ ఒక n వ తరగతి చతురస్ర మాత్రిక అయితే దానిలోని మూలకాలు a_{11}, a_{12} ...., a_{nn} లను ప్రధాన వికర్ణం లేదా వికర్ణంను ఏర్పరుస్తాయి. a_{ij} మూలకం $i = j$ అయినపుడు వికర్ణంలో ఉంటుంది

$\begin{bmatrix}\boxed{2} & 0 & 1\\ 4 & \boxed{-1} & 2\\ 7 & 6 & \boxed{9}\end{bmatrix}$ వికర్ణంలోని మూలకాలు 2, −1, 9

మాత్రిక జాడ

ఒక చతురస్ర మాత్రిక A లోని వికర్ణంలోని మూలకాల మొత్తాన్ని మాత్రిక జాడ అంటాం. దీనిని జాడ A లేదా Tr(A) తో సూచిస్తాం.

$A = [a_{ij}]$ ఒక n వ తరగతి చతురస్ర మాత్రిక అయితే

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

ఉదా: $$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 7 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

జాడ A లేదా $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = 2 + (-1) + 9 = 10$

2. వికర్ణ మాత్రిక

ఒక చతురస్ర మాత్రికలో వికర్ణంలో లేని మూలకాలన్నీ సున్నాలైతే, ఆ మాత్రికను వికర్ణ మాత్రిక అంటాం.

ఉదా: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ లు వికర్ణమాత్రికలు

3. సంఖ్యా మాత్రిక:

ఒక చతురస్ర మాత్రికలో వికర్ణంలోని మూలకాలన్ని ఒక సంఖ్య k కు సమానమై, వికర్ణంలో లేని మూలకాలన్నీ సున్నాలైతే ఆ మాత్రికను సంఖ్యామాత్రిక అంటాం.

ఉదా: $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ లు సంఖ్యామాత్రికలు

4. యూనిట్ (తత్సమ) మాత్రిక:

ఒక చతురస్ర మాత్రికలో వికర్ణంలోని మూలకాలన్నీ 1 అయి, వికర్ణంలో లేని మూలకాలన్నీ సున్నాలైతే, ఆ మాత్రికను యూనిట్ మాత్రిక లేదా తత్సమ మాత్రిక అంటాం.

ఉదా: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ లు యూనిట్ మాత్రికలు

5. శూన్య మాత్రిక:

ఒక మాత్రికలోని ప్రతి మూలకం సున్న అయితే, ఆ మాత్రికను శూన్య మాత్రిక అంటాం. శూన్య మాత్రికను 'O' తో సూచిస్తాం.

ఉదా: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$, $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

6. అడ్డువరుస మాత్రిక :

ఒకే ఒక అడ్డువరుస ఉన్న మాత్రికను అడ్డువరుస మాత్రిక అంటారు.

ఉదా: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}_{1\times 3}$

7. నిలువు వరుస మాత్రిక

ఒకే ఒక నిలువు వరుస ఉన్న మాత్రికను నిలువు వరుస మాత్రిక అంటారు.

ఉదా: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times 1}$

8. త్రిభుజ మాత్రికలు

ఒక చతురస్ర మాత్రిక $A = [a_{ij}]$ లో $i > j$ అయినపుడు $a_{ij} = 0$ అయితే A ని ఎగువ త్రిభుజమాత్రిక అంటారు. A లో $i < j$ అయినపుడు $a_{ij} = 0$ అయితే A ని దిగువ త్రిభుజ మాత్రిక అంటారు.

ఉదా: $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ లు ఎగువ త్రిభుజ మాత్రికలు

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ లు దిగువ త్రిభుజ మాత్రికలు

మాత్రికల సమానత

రెండు మాత్రికలు A, B లు ఒకే తరగతికి చెందినవై, వాటిలోని అనురూప మూలకాలు సమానమైతే A, B లు సమానం అంటాం.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$i = 1, 2, 3,\ \ j = 1, 2, 3$ లకు $a_{ij} = b_{ij}$ అయితే

పై మాత్రికలు A, B లు సమానం.

రెండు మాత్రికల మొత్తం

A, B లు ఒకే తరగతికి చెందిన మాత్రికలు, A, B లలో అనురూప మూలకాలను కలిపి అదే అనురూప స్థానంలో రాస్తే ఏర్పడే మాత్రికను A, B ల సంకలనం (మొత్తం) అంటాం. దీనిని A + B లో గుర్తిస్తాం. మాత్రిక A + B తరగతి, మాత్రికలు A, B ల తరగతితో సమానం.

మాత్రికను సంఖ్యతో గుణించడం

A ఒక $m \times n$ తరగతి మాత్రిక అనీ, k ఒక సంఖ్య అని అనుకొందాం. A లోని ప్రతి మూలకాన్ని k తో గుణించి, అదే స్థానంలో రాస్తే వచ్చే తరగతి $m \times n$ మాత్రికను A ను, k తో గుణిస్తే వచ్చే మాత్రిక అంటాం. దీనిని kA తో సూచిస్తాం.

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ అయితే $kA = [ka_{ij}]_{m \times n}$ అవుతుంది.

మాత్రికను సంఖ్యతో గుణించడం-ధర్మాలు

A, B లు ఒకే తరగతి మాత్రికలు, α, β లు సంఖ్యలు అనుకొందాం.

అపుడు (i) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = \beta(\alpha A)$

(ii) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

(iii) $0A = O$

(iv) $\alpha O = O$

(v) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

అతి స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$, **A + B = X అయితే** x_1, x_2, x_3, x_4 **ల విలువలు కనుక్కోండి?**

సాధన: $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$

$A + B = X$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = 7 \\ x_4 = -3 \end{array}$$

2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **అయితే $\mathbf{A + B + C}$ కనుక్కోండి?**

సాధన: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{A + B + C} = \begin{bmatrix} -1+1+(-2) & -2+(-2)+1 & 3+5+2 \\ 1+1+1 & 2+(-2)+1 & 4+2+2 \\ 2+1+2 & -1+2+0 & 3+(-3)+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -3 & 10 \\ 3 & 1 & 8 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, **$\mathbf{X = A + B}$ అయితే మాత్రిక $\mathbf{X}$ ను కనుక్కోండి?**

సాధన: $X = A + B$

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 3+(-3) & 2+(-1) & -1+0 \\ 2+2 & -2+1 & 0+3 \\ 1+4 & 3+(-1) & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

4. $\begin{bmatrix} x-3 & 2y-8 \\ z+2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & a-4 \end{bmatrix}$ **అయితే *x, y, z, a* ల విలువలను కనుక్కోండి?**

సాధన: $\begin{bmatrix} x-3 & 2y-8 \\ z+2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & a-4 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow x-3=5 \Rightarrow x=5+3=8 \Rightarrow \boxed{x=8}$

$\Rightarrow 2y-8=2 \Rightarrow 2y=2+8=10$

$2y=10$

$y=\frac{\cancel{10}}{\cancel{2}}=5 \Rightarrow \boxed{y=5}$

$\Rightarrow z+2=-2 \Rightarrow z=-2-2=-4 \Rightarrow \boxed{z=-4}$

$\Rightarrow 6=a-4 \Rightarrow a=6+4 \Rightarrow \boxed{a=10}$

5. $\begin{bmatrix} x-1 & 2 & 5-y \\ 0 & z-1 & 7 \\ 1 & 0 & a-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **అయితే *x, y, z, a* ల విలువలు కనుక్కోండి?**

సాధన: $\begin{bmatrix} x-1 & 2 & 5-y \\ 0 & z-1 & 7 \\ 1 & 0 & a-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow x-1=1 \Rightarrow x=1+1=2 \Rightarrow \boxed{x=2}$

$\Rightarrow 5-y=3 \Rightarrow y=5-3=2 \Rightarrow \boxed{y=2}$

$\Rightarrow z-1=4 \Rightarrow z=4+1=5 \Rightarrow \boxed{z=5}$

$\Rightarrow a-5=0 \Rightarrow \boxed{a=5}$

6. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **అయితే A జాడ కనుక్కోండి?**

సాధన: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

A మాత్రిక జాడ $= 1+(-1)+1=1$

7. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ **అయితే B – A, 4A – 5B లను కనుక్కోండి?**

సాధన: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow B - A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$B - A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -4 \\ -4 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$4A - 5B = 4\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 8 & 12 & 16 \\ 16 & 20 & -24 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & 10 & 15 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$4A - 5B = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -7 \\ 8 & 7 & 16 \\ 16 & 20 & -19 \end{bmatrix}$$

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ **అయితే** 3B – 2A **ను కనుక్కోండి?**

సాధన: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow 2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow 3B = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$3B - 2A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

9. $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ అయితే $A^2 = -I$ అని చూపండి? ($i^2 = -1$)

సాధన: $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

$$A \times A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} i^2+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{A^2 = -I}$$

10. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ అయితే A^2 ను కనుక్కోండి?

సాధన: $A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 16+(-2) & 8+2 \\ -4+(-1) & -2+1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 14 & 10 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$$

11. $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ అయితే A^2ను కనుక్కోండి?

సాధన: $A^2 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} i^2+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+i^2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{A^2 = -I}$$

12. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & k \end{bmatrix}$, $A^2 = O$ **అయితే** k **విలువ కనుక్కోండి?**

సాధన: $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & k \end{bmatrix}$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & k \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & k \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4+(-4) & 8+4k \\ -2+(-k) & -4+k^2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 8+4k \\ -2-k & -4+k^2 \end{bmatrix}$$

$A^2 = O$

$$\begin{bmatrix} 0 & 8+4k \\ -2-k & -4+k^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$8 + 4k = 0$

$4k = -8$

$$k = \frac{\cancel{-8}}{\cancel{4}} = -2$$

$\therefore\ k = -2$

13. $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **అయితే** $2A+B^1$, $3B^1-A$ **లను కనుక్కోండి?**

సాధన: $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$2A = 2\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 10 & 0 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \; B^1 = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2A + B^1 = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 10 & 0 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 13 & 0 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 3B^1 = 3 \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 12 \\ 9 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 3B^1 - A = \begin{bmatrix} -6 & 12 \\ 9 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 11 \\ 4 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

14. $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ **అయితే** $A+A^1$, AA^1 **లను కనుక్కోండి?**

సాధన: $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$, $A^1 = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

$$A+A^1 = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$AA^1 = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AA^1 = \begin{bmatrix} 4+16 & -10-12 \\ -10-12 & 25+9 \end{bmatrix}$$

$$AA^1 = \begin{bmatrix} 20 & -22 \\ -22 & 34 \end{bmatrix}$$

సౌష్ఠవ మాత్రిక:

$A^1 = A$ అయ్యేటట్లుగా ఉండే చతురస్ర మాత్రిక A ను సౌష్ఠవ మాత్రిక అంటాం.

ఉదా: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

వక్ర సౌష్ఠవ మాత్రిక:

$A^1 = -A$ అయ్యేటట్లుగా ఉండే చతురస్ర మాత్రిక A ను వక్ర సౌష్ఠవ మాత్రిక అంటాం.

ఉదా: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

15. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & x & 7 \end{bmatrix}$ **ఒక సౌష్ఠవ మాత్రిక అయితే x విలువ ఎంత?**

సాధన: $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & x & 7 \end{bmatrix}, \; A^1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & x \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

A సౌష్ఠవ మాత్రిక $\Leftrightarrow \boxed{A^1 = A}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & x \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & x & 7 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \boxed{x = 6}$

16. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & x & 0 \end{bmatrix}$ **ఒక వక్ర సౌష్ఠవ మాత్రిక అయితే x విలువ ఎంత?**

సాధన: A వక్రసౌష్ఠవ మాత్రిక $\Leftrightarrow \boxed{A^1 = -A}$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & x \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & x \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -x & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \boxed{x = 2}$

17. $A=\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ **అయితే** $AA^1 = A^1A = I$ **అని చూపండి.**

సాధన: $A=\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, $A^1=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

$$AA^1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & -\cos\alpha\ \sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha \\ -\sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^1A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & -\cos\alpha\ \cancel{\sin\alpha} + \cancel{\sin\alpha}\ \cos\alpha \\ \cancel{\sin\alpha}\ \cos\alpha - \cancel{\cos\alpha}\ \sin\alpha & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \boxed{\therefore \quad AA^1 = A^1A = I}$$

స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు (4 మార్కులు)

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ **అయితే** AB, BA **లను కనుక్కోండి.**

సాధన: $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{3\times3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{3\times2} = \begin{bmatrix} 0-1+4 & 0+0-2 \\ 1-2+6 & -2+0-3 \\ 2-3+8 & -4+0-4 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -5 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow BA = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 2} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

B లోని నిలువు వరుసల సంఖ్య, A లో అడ్డువరుసల సంఖ్యకు సమానం కాదు. కావున BA నిర్వచితం కాదు.

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ **లు మాత్రికా గుణకారం దృష్ట్యా వినిమయ న్యాయాన్ని పాటిస్తాయేమో పరిశీలించండి.**

సాధన: A, B మాత్రికలు 3వ తరగతి చతురస్ర మాతికలు కాబట్టి AB, BA లు నిర్వచితం

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0+3 & 0-2+6 & 2-4+0 \\ 2+0-1 & 0+3-2 & 4+6+0 \\ -3+0+2 & 0+1+4 & -6+2+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 10 \\ -1 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0-6 & -2+0+2 & 3+0+4 \\ 0+2-6 & 0+3+2 & 0-1+4 \\ 1+4+0 & -2+6+0 & 3-2+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 0 & 7 \\ -4 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$AB \neq BA$ కాబట్టి A, B లు మాత్రికా గుణకారం దృష్ట్యా వినిమయ న్యాయాన్ని పాటించవు.

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ **అయితే** $A^2 - 4A - 5I = O$ **అని చూపండి.**

సాధన: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+4+4 & 2+2+4 & 2+4+2 \\ 2+2+4 & 4+1+4 & 4+2+2 \\ 2+4+2 & 4+2+2 & 4+4+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 4A = 4\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 5I = 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

కాబట్టి $A^2 - 4A - 5I$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 - 4A - 5I = O$$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **అయితే AB, BA లు నిర్వచితమా ? అయితే లబ్ధమాత్రికలు కనుక్కోండి. A, B లు గుణకారం దృష్ట్యా వినిమయమవుతాయా?**

సాధన: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}_{2\times3}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{3\times2}$

AB గుణనం ఒక 2×2 మాత్రిక

BA గుణనం ఒక 3×3 మాత్రిక అవుతుంది.

$\therefore$ లబద్ధ మాత్రిక $AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 2-8+6 & 3-10+3 \\ -8+8+10 & -12+10+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-12 & -4+6 & 6+15 \\ 4-20 & -8+10 & 12+25 \\ 2-4 & -4+2 & 6+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 2 & 21 \\ -16 & 2 & 37 \\ -2 & -2 & 11 \end{bmatrix}$$

$AB \neq BA$ కావున A , B లు గుణకారం దృష్ట్యా వినిమయ న్యాయాన్ని పాటించవు.

5. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **అయితే A^4 ని కనుక్కోండి?**

సాధన: $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A^4 = \left\{3\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right\}^4 = 3^4\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}^4$$

$$A^4 = 81\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}81 & 0 & 0\\0 & 81 & 0\\0 & 0 & 81\end{bmatrix}$$

6. $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\5 & 2 & 6\\-2 & -1 & -3\end{bmatrix}$ **అయితే** A^3 **ను కనుక్కోండి?**

సాధన: $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\5 & 2 & 6\\-2 & -1 & -3\end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\5 & 2 & 6\\-2 & -1 & -3\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\5 & 2 & 6\\-2 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1+5-6 & 1+2-3 & 3+6-9\\5+10-12 & 5+4-6 & 15+12-18\\-2-5+6 & -2-2+3 & -6-6+9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\3 & 3 & 9\\-1 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\3 & 3 & 9\\-1 & -1 & -3\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\5 & 2 & 6\\-2 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix}0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0\\3+15-18 & 3+6-9 & 9+18-27\\-1-5+6 & -1-2+3 & -3-6+9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

7. $A = \begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\0 & 1 & -1\\3 & -1 & 1\end{bmatrix}$ **అయితే** $A^3–3A^2–A–3I$ **విలువ కనుక్కోండి (ఇక్కడ** I **ఒక 3వ తరగతి యూనిట్ మాత్రిక)**

సాధన: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1+0+3 & -2-2-1 & 1+2+1 \\ 0+0-3 & 0+1+1 & 0-1-1 \\ 3+0+3 & -6-1-1 & 3+1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 4 \\ -3 & 2 & -2 \\ 6 & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 4 \\ -3 & 2 & -2 \\ 6 & -8 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 4+0+12 & -8-5-4 & 4+5+4 \\ -3+0-6 & 6+2+2 & -3-2-2 \\ 6+0+15 & -12-8-5 & 6+8+5 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 16 & -17 & 13 \\ -9 & 10 & -7 \\ 21 & -25 & 19 \end{bmatrix}$$

$$3A^2 = 3\begin{bmatrix} 4 & -5 & 4 \\ -3 & 2 & -2 \\ 6 & -8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -15 & 12 \\ -9 & 6 & -6 \\ 18 & -24 & 15 \end{bmatrix}$$

$$3I = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow A^3 - 3A^2 - A - 3I$

$$= \begin{bmatrix} 16 & -17 & 13 \\ -9 & 10 & -7 \\ 21 & -25 & 19 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & -15 & 12 \\ -9 & 6 & -6 \\ 18 & -24 & 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3} = \mathrm{O}$$

$$\therefore \boxed{\mathrm{A}^3 - 3\mathrm{A}^2 - \mathrm{A} - 3\mathrm{I} = \mathrm{O}}$$

8. $\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **అయితే** $(a\mathrm{I}+b\mathrm{E})^3 = a^3\mathrm{I} + 3a^2b\mathrm{E}$ **అని చూపండి (ఇక్కడ** I **ఒక 2వ తరగతి యూనిట్ మాత్రిక)**

సాధన: LHS $= (a\mathrm{I} + b\mathrm{E})^3$

$$= \left[a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]^3$$

$$= \left[\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]^3 = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}^3$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+0 & ab+ba \\ 0+0 & 0+a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}^2 \times \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

$$\text{L.H.S.} = \begin{bmatrix} a^3+0 & a^2b+2a^2b \\ 0+0 & 0+a^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{bmatrix}$$

R.H.S. $= a^3\mathrm{I} + 3a^2b\mathrm{E}$

$$= a^3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 3a^2b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & a^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3a^2b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ L.H.S. = RHS

$$\boxed{(a\mathrm{I}+b\mathrm{E})^3 = a^3\mathrm{I}+3a^2b\mathrm{E}}$$

9. $\theta - \phi = \frac{\pi}{2}$ **అయితే** $\begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2\phi & \cos\phi\sin\phi \\ \cos\phi\sin\phi & \sin^2\phi \end{bmatrix} = O$ **అని చూపండి.**

సాధన: $\begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2\phi & \cos\phi\sin\phi \\ \cos\phi\sin\phi & \sin^2\phi \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta\cos^2\phi + \cos\theta\sin\theta\cdot\cos\phi\sin\phi & \cos^2\theta\cdot\cos\phi\sin\phi + \cos\theta\sin\theta\cdot\sin^2\phi \\ \cos\theta\sin\theta.\cos^2\phi + \sin^2\theta\cdot\cos\phi\sin\phi & \cos\theta\sin\theta\cdot\cos\phi\sin\phi + \sin^2\theta\cdot\sin^2\phi \end{bmatrix}$$

$$\theta - \phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + \phi$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) = -\sin\phi$$

$$\sin\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) = \cos\phi$$

$$= \begin{bmatrix} \sin^2\phi\cos^2\phi - \sin^2\phi\cos^2\phi & \sin^2\phi\cos\phi\sin\phi - \sin\phi\cos\phi\sin^2\phi \\ (-\sin\phi\cos\phi)\left(\cos^2\phi\right) + \cos^2\phi\cos\phi\sin\phi & -\sin\phi\cos\phi\cos\phi\sin\phi + \cos^2\phi\sin^2\phi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sin^2\phi\cos^2\phi - \sin^2\phi\cos^2\phi & \sin^3\phi\cos\phi - \sin^3\phi\cos\phi \\ -\sin\phi\cos^3\phi + \sin\phi\cos^3\phi & -\sin^2\phi\cos^2\phi + \sin^2\phi\cos^2\phi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$= O.$

అసాధారణ మాత్రిక:

ఒక చతురస్ర మాత్రిక నిర్ధారం సున్న అయితే దానిని అసాధారణ మాత్రిక అంటారు. ఉదా: $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

సాధారణ మాత్రిక:

ఒక చతురస్ర మాత్రిక నిర్ధారకం సున్నా కాకపోతే దానిని సాధారణ మాత్రిక అంటారు. ఉదా: $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

అనుబంధ మాత్రిక:

ఒక చతురస్ర మాత్రిక A లో మూలకాల స్థానాలలో వాటి సంబంధిత సహగుణావయవాలను రాసి వ్యత్యయం చేస్తే వచ్చే మాత్రికను A కు అనుబంధ మాత్రిక అంటాం. దీనిని AdjA తో సూచిస్తాం.

విలోమనీయ మాత్రిక:

A ఒక చతురస్ర మాత్రిక అయి, I యూనిట్ మాత్రిక అయితే AB = BA = I అయ్యేటట్లుగా మాత్రిక B, వ్యవస్థితమైతే A ని విలోమనీయ మాత్రిక అంటారు.

10. $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ **ఒక సాధారణ మాత్రిక అయితే,** A **విలోమనీయం మరియు** $A^{-1} = \dfrac{\text{Adj}\,A}{\det A}$ **అని చూపండి.**

సాధన: $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$

$$\text{Adj}A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}$$

$$A\,.\,\text{Adj}A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 & a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 & a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3 \\ a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 & a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 & a_2A_3 + b_2B_3 + c_2C_3 \\ a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 & a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2 & a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{bmatrix} = \det A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$= \det A\,.\,I$

$\det A \neq 0$ కాబట్టి

$A.(\text{Adj}A) = \det A\,.\,I$

$$\Rightarrow A\left(\frac{\text{Adj}\,A}{\det A}\right) = I$$

ఇదేవిధంగా $\left(\dfrac{\text{Adj}\,A}{\det A}\right) \cdot A = I$ అని చూపవచ్చు

కాబట్టి $B = \dfrac{\text{Adj}\,A}{\det A}$ అయితే $AB = BA = I$

కాబట్టి A విలోమనీయం మరియు $A^{-1} = B = \dfrac{\text{Adj}\,A}{\det A}$

దీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు (7 మార్కుల)

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ **కు అనుబంధ మాత్రికను, విలోమ మాత్రికను కనుక్కోండి.**

సాధన: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$\det A = 1\,(16-9) - 3\,(4-3) + 3\,(3-4)$$
$$= 7 - 3 - 3 = 1 \neq 0$$

A కు సహగుణవయాల మాత్రిక B అయితే $B = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\text{Adj}\,A = B^T = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}\,A}{\det A} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [\because \det A = 1]$$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **సాధారణ మాత్రిక అని చూపి A^{-1} ను కనుక్కోండి**

సాధన: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det A = 1\,(4-3) - 2\,(6-3) + 1\,(3-2)$$
$$= 1 - 6 + 1 = -4 \neq 0$$

A సాధారణ మాత్రిక కాబట్టి, విలోమనీయం. A కు సహగుణావయవ మాత్రిక B అయితే

A యొక్క సహగుణావయవ మాత్రిక $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

$$\text{Adj } A = B^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj} A}{\det A} = \frac{1}{-4}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **అయితే** $(A')^{-1}$ **కనుక్కోండి**

సాధన: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{del } (A^1) = 1\,(-1-8) + 0 - 2\,(-8+3)$$

$$= -9 + 0 + 10 = 1 \neq 0$$

A^1 యొక్క సహగుణవయమాత్రిక $= \begin{bmatrix} -9 & 8 & -5 \\ -8 & 7 & -4 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

A^1 యొక్క అనుబంధ మాత్రిక $= \begin{bmatrix} -9 & -8 & -2 \\ 8 & 7 & 2 \\ -5 & -4 & -1 \end{bmatrix}$

$$(A^1)^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^1)}{\det(A^1)} = \begin{bmatrix} -9 & -8 & -2 \\ 8 & 7 & 2 \\ -5 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

4. $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ **అయితే** $\text{adj}A = 3A^1$ **అని చూపి** A^{-1} **కనుక్కోండి**

సాధన: $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3A^1 = 3\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3A^1 = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 6 \\ -6 & 3 & -6 \\ -6 & -6 & 3 \end{bmatrix} \quad ....(1)$$

మాత్రిక A యొక్క సహగునవయ మాత్రిక $= \begin{bmatrix} -3 & -6 & -6 \\ 6 & 3 & -6 \\ 6 & -6 & 3 \end{bmatrix}$

$$\text{Adj}A = \begin{bmatrix} -3 & -6 & -6 \\ 6 & 3 & -6 \\ 6 & -6 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 6 \\ -6 & 3 & -6 \\ -6 & -6 & 3 \end{bmatrix} \quad ....(2)$$

(1), (2) ల నుండి, Adj A = $3A^1$

$\det A = -1(1-4) + 2(2+4) - 2(-4-2)$

$= 3 + 12 + 12 = 27 \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}\,A}{\det A} = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} -3 & 6 & 6 \\ -6 & 3 & -6 \\ -6 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{27} & \frac{6}{27} & \frac{6}{27} \\ -\frac{6}{27} & \frac{3}{27} & -\frac{6}{27} \\ -\frac{6}{27} & \frac{-6}{27} & \frac{3}{27} \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

5. $3A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ **అయితే** $A^{-1} = A^T$ **అని చూపండి.**

సాధన: $3A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AA^T = I \Rightarrow A^{-1} = A^T$$

$$A^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A \times A^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1+4+4 & 2+2-4 & -2+4-2 \\ 2+2-4 & 4+1+4 & -4+2+2 \\ -2+4-2 & -4+2+2 & 4+4+1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix}9 & 0 & 0\\0 & 9 & 0\\0 & 0 & 9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = I$$

$AA^T = I$

$A^{-1} = A^T$

ఏకఘాత సమీకరణ వ్యవస్థ సాధన పద్ధతులు

క్రేమర్ నియమం

$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$

$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$ అనే సమీకరణ వ్యవస్థను తీసుకుందాం

$\Rightarrow$ ఇక్కడ $A = \begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}$ సాధారణ మాత్రిక అనుకుందాం

$\Rightarrow$ $D = \begin{bmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{bmatrix}$ అయితే $AX = D$ సమీకరణానికి $X = \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ ఒక సాధన అనుకొనుము.

$\Rightarrow$ $\Delta = \begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$ అనుకొనుము.

అప్పుడు $x\Delta = \begin{vmatrix}a_1x & b_1 & c_1\\a_2x & b_2 & c_2\\a_3x & b_3 & c_3\end{vmatrix}$

$C_1 \to C_1 + yC_2 + zC_3$ చేస్తే

$$x\Delta = \begin{vmatrix}a_1x+b_1y+c_1z & b_1 & c_1\\a_2x+b_2y+c_2z & b_2 & c_2\\a_3x+b_3y+c_3z & b_3 & c_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}d_1 & b_1 & c_1\\d_2 & b_2 & c_2\\d_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

$\therefore$ $\Delta_1 = \begin{vmatrix}d_1 & b_1 & c_1\\d_2 & b_2 & c_2\\d_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$ అయితే $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$

ఇదే విధంగా $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$ అయితే $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$ అయితే $z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$ అని చూపవచ్చు.

$\dfrac{x}{\Delta_1} = \dfrac{y}{\Delta_2} = \dfrac{z}{\Delta_3} = \dfrac{1}{\Delta}$ దీనినే క్రేమర్ నియమం అంటారు.

మాత్రిక విలోమ పద్ధతి

మాత్రిక సమీకరణం AX = D లో A సాధారణ మాత్రిక అనుకొందాం. అప్పుడు A^{-1} కనుక్కోవచ్చు.

$$AX = D \Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}D$$

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}D$$

$$IX = A^{-1}D$$

$X = A^{-1}D$ దీని నుంచి x, y, z తెలుస్తాయి.

6. కింది సమకాలిక ఏకఘాత సమీకరణాలను క్రేమర్ నియమం ఉపయోగించి సాధించండి.

$3x + 4y + 5z = 18,\ 2x - y + 8z = 13\quad 5x - 2y + 7z = 20$

సాధన: $3x + 4y + 5z = 18,$

$2x - y + 8z = 13$

$5x - 2y + 7z = 20$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 8 \\ 5 & -2 & 7 \end{bmatrix}\quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\quad D = \begin{bmatrix} 18 \\ 13 \\ 20 \end{bmatrix}$$

దత్త సమీకరణాల మాత్రికా సమీకరణ రూపం AX = D అవుతుంది.

$$\Delta = \det A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 8 \\ 5 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= 3(-7+16) - 4(14-40) + 5(-4+5)$$

$$= 3(9) - 4(-26) + 5(1)$$

$= 27 + 104 + 5 = 136 \neq 0$

కాబట్టి దత్త సమీకరణాలను క్రేమర్ నియమం ఉపయోగించి సాధించవచ్చు.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 18 & 4 & 5 \\ 13 & -1 & 8 \\ 20 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 408$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 18 & 5 \\ 2 & 13 & 8 \\ 5 & 20 & 7 \end{vmatrix} = 136$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 18 \\ 2 & -1 & 13 \\ 5 & -2 & 20 \end{vmatrix} = 136$$

కాబట్టి క్రామర్ నియమం ప్రకారం

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{408}{136} = 3$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{136}{136} = 1$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{136}{136} = 1$$

దత్త సమీకరణాల సాధన $\boxed{x = 3,\ y = 1,\ z = 1}$

7. కింది సమీకరణ వ్యవస్థలను క్రేమర్ నియమంతో సాధించండి.

(i) $5x - 6y + 4z = 15$, $7x + 4y - 3z = 19$, $2x + y + 6z = 46$

సాధన: (i) $5x - 6y + 4z = 15$,

$7x + 4y - 3z = 19$,

$2x + y + 6z = 46$

$$\det A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 7 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 15 \\ 19 \\ 46 \end{bmatrix}\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\det A = \Delta = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 7 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} = 5(24 + 3) + 6\,(42 + 6) + 4\,(7-8)$$

$$= 135 + 288 - 4$$

$$\Delta = 419 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 15 & -6 & 4 \\ 19 & 4 & -3 \\ 46 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 1257$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 15 & 4 \\ 7 & 19 & -3 \\ 2 & 46 & 6 \end{vmatrix} = 1676$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -6 & 15 \\ 7 & 4 & 19 \\ 2 & 1 & 46 \end{vmatrix} = 2514$$

క్రేమర్ నియమం నుండి

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1257}{419} = 3$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1676}{419} = 4$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{2514}{419} = 6$$

$$\therefore \boxed{x = 3,\ y = 4,\ z = 6}$$

(ii) $x + y + z = 1$

$2x + 2y + 3z = 6$

$x + 4y + 9z = 3$

సాధన: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 1(18 - 12) - 1\,(18 - 3) + 1\,(8 - 2)$$

$$\Delta = 6 - 15 + 6 = -3 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 9 \end{vmatrix} = -21$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 30$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -12$$

క్రేమర్ నియమం నుండి

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-21}{-3} = 7$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{30}{-3} = -10$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-12}{-3} = 4$$

$$\therefore \boxed{x = 7,\; y = -10,\; z = 4}$$

(iii) $x - y + 3z = 5$

$4x + 2y - z = 0$

$-x + 3y + z = 5$

సాధన: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1(2 + 3) + 1\,(4 - 1) + 3\,(12 + 2) = 5 + 3 + 42 = 50 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 50$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 100$$

క్రేమర్ నియమం నుండి

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0}{50} = 0$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{50}{50} = 1$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{100}{50} = 2$$

$$\therefore \boxed{x = 0,\ y = 1,\ z = 2}$$

(iv) $x + y + z = 9$

$2x + 5y + 7z = 52$

$2x + y - z = 0$

సాధన: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 9 \\ 52 \\ 0 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1(-5-7) - 1(-2-14) + 1(2-10)$$

$$= -12 + 16 - 8 = -4 \neq 0$$

$$\Delta = -4$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 52 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 2 & 52 & 7 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -12$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 2 & 5 & 52 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -20$$

క్రేమర్ నియమం నుండి

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-12}{-4} = 3$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-20}{-4} = 5$$

$$\boxed{\therefore \quad x = 1,\ y = 3,\ z = 5}$$

8. కింది సమకాలిక ఏకఘాత సమీకరణాలను మాత్రికా విలోమ పద్ధతినుపయోగించి సాధించండి.

i) $3x + 4y + 5z = 18$, $2x - y - 8z = 13$, $5x - 2y + 7z = 20$

సాధన: $3x + 4y + 5z = 18$

$2x - y - 8z = 13$

$5x - 2y + 7z = 20$

దత్త సమీకరణాల మాత్రిక సమీకరణ రూపం AX = D అవుతుంది.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 8 \\ 5 & -2 & 7 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 18 \\ 13 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 8 \\ 5 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 3(-7 + 16) - 4\,(14 - 40) + 5\,(-4 + 5)$$

$$= 27 + 104 + 5 = 136 \neq 0$$

A యొక్క సహగుణావయవ మాత్రిక $= \begin{bmatrix} 9 & 26 & 1 \\ -38 & -4 & 26 \\ 37 & -14 & -11 \end{bmatrix}$

$$\text{Adj A} = \begin{bmatrix} 9 & -38 & 37 \\ 26 & -4 & -14 \\ 1 & 26 & -11 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} D$$

$$X = \left(\frac{\text{Adj A}}{\det A}\right).D$$

$$= \frac{1}{136}\begin{bmatrix} 9 & -38 & 37 \\ 26 & -4 & -14 \\ 1 & 26 & -11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 18 \\ 13 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{136}\begin{bmatrix} 408 \\ 136 \\ 136 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{x = 3,\ y = 1,\ z = 1}$$

(ii) $2x - y + 3z = 9$

$x + y + z = 6$

$x - y + z = 2$

సాధన: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\boxed{AX = D \Rightarrow X = A^{-1}D}$$

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\ (1 + 1) + 1\ (0 - 0) + 3\ (-1 - 1)$$

$$= 4 - 6 = -2 \neq 0$$

A మాత్రిక యొక్క సహగుణావయవమాత్రిక $= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\text{Adj A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} D$$

$$X = \left(\frac{\text{AdjA}}{\det A}\right) . D$$

$$X = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\therefore \quad x = 1,\ y = 2,\ \ z = 3}$$

(iii) $x + y + z = 1$

$2x + 2y + 3z = 6$

$x + 4y + 9z = 3$

సాధన: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\boxed{AX = D \Rightarrow X = A^{-1}D}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 1\,(18-12) - 1\,(18-3) + 1\,(8-2)$$

$$= 6 - 15 + 6 = -3 \neq 0$$

$\det A \neq 0 = -3$

A మాత్రిక యొక్క సహగుణావయవమాత్రిక $= \begin{bmatrix} 6 & -15 & 6 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -15 & 8 & -1 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$X = A^{-1} D$

$$X = \left(\frac{\text{Adj } A}{\det A}\right) . D$$

$$X = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -15 & 8 & -1 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -21 \\ 30 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -10 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\therefore \quad x = 7,\ y = -10,\ z = 4}$$

(iv) $2x - y + 3z = 8$

$-x + 2y + z = 4$

$3x + y - 4z = 0$

సాధన: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\boxed{AX = D \Rightarrow X = A^{-1}D}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 2(-8-1) + 1(4-3) + 3(-1-6)$$

$$= -18 + 1 - 21 = -38 \neq 0$$

$\det A = -38 \neq 0$

A మాత్రిక యొక్క సహగుణావయవమాత్రిక $= \begin{bmatrix} -9 & -1 & -7 \\ -1 & -17 & -5 \\ -7 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -9 & -1 & -7 \\ -1 & -17 & -5 \\ -7 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} D$$

$$X = \left(\frac{\text{A}d\text{JA}}{\det A} \right) . D$$

$$X = -\frac{1}{38} \begin{bmatrix} -9 & -1 & -7 \\ -1 & -17 & -5 \\ -7 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{38} \begin{bmatrix} -76 \\ -76 \\ -76 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\therefore \quad x = 1, \; y = 1, \quad z = 1}$$

Practise Problems

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ అయితే $A^{-1} = A^3$ అని చూపండి

2. క్రింది సమీకరణ వ్యవస్థలను క్రేమర్ నియమం ద్వారా సాధించండి.

   (i) $2x - y + 3z = 9, x + y + z = 6, \ x - y + z = 2$

   (ii) $2x - y + 3z = 8, \ -x + 2y + z = 4, \ 3x + y - 4z = 0$

   (iii) $2x - y + 8z = 13, \ 3x + 4y + 5z = 18, \ 5x - 2y + 7z = 20$

3. కింది సమీకరణ వ్యవస్థలను మాత్రికా విలోమ పద్ధతిలో సాధించండి.

   (i) $x + y + z = 1, 2x + 2y + 3z = 6, \ x + 4y + 9z = 3$

   (ii) $x - y + 3z = 5, \ 4x + 2y - z = 0, \ -x + 3y + z = 5$

   (iii) $x + y + z = 9, \ 2x + 5y + 7z = 52, \ 2x + y - z = 0$

❖❖❖❖❖

యూనిట్ **4**

సదిశల సంకలనం

- **అదిశలు :** పరిమాణం ఉండి, దిశ లేని భౌతికరాశులను 'అదిశలు' అంటారు.

  ఉదా॥ పొడవు, ఘనపరిమాణం, ఉష్ణోగ్రత.

- **సదిశలు:** పరిమాణం మరియు దిశ కలిగిన భౌతిక రాశులను 'సదిశలు' అంటారు.

  ఉదా॥ వేగం, స్థానభ్రంశం, బలం.

- **స్థాన సదిశ:** 'O', 'P'లు అంతరాళంలో ఏవేని రెండు బిందువులు. 'O' తొలిబిందువు మరియు 'P' తుదిబిందువుగా గల సదిశ $\overline{OP}$ ని, 'O' పరంగా బిందువు 'P' యొక్క స్థానసదిశ అంటారు.

  మూలబిందువు O (0,0,0) పరంగా P (x,y,z) బిందువు యొక్క స్థానసదిశను $\bar{r}$ తో సూచిస్తాం.

  $\overline{OP}$ పరిమాణం, $|\overline{OP}| = |\bar{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

  గమనిక:- $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ = B యొక్క స్థాన సదిశ−A యొక్క స్థానసదిశ

దిక్ కొసైన్లు, దిక్ నిష్పత్తులు:

P (x,y,z) బిందువు యొక్క స్థానసదిశ $\overline{OP} = \bar{r}$, X, Y, Z అక్షాలతో ధనాత్మక దిశ (అపసవ్యదిశ)లో వరుసగా α, β, γ కోణాలు చేస్తే, $\text{Cos}\alpha, \text{Cos}\beta, \text{Cos}\gamma$ లను సదిశ $\bar{r}$ యొక్క దిక్ కొసైన్లు అంటారు.

వీటిని వరుసగా l, m, n లతో సూచిస్తాం.

అనగా, $l = \text{Cos}\alpha$

$m = \text{Cos}\beta$

$n = \text{Cos}\gamma$

P బిందువు యొక్క నిరూపకాలు x,y,z లను (lr,mr,nr) గా కూడా వ్యక్తపరచవచ్చు. దిక్‌కొసైన్లు l,m,nలకు అనుపాతంలో ఉండే lr, mr,nr సంఖ్యలను, సదిశ $\bar{r}$ యొక్క 'దిక్ నిష్పత్తులు' అంటారు.

వీటిని వరుసగా a,b,c లతో సూచిస్తాం.

అనగా, $a = lr$

$b = mr$

$c = nr$

గమనిక:- $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

యూనిట్ సదిశ: ఒక సదిశ పరిమాణం ఒక యూనిట్ అయితే, ఆ సదిశను 'యూనిట్ సదిశ' అంటారు. దీనిని $\bar{e}$తో సూచిస్తాం.

ఒక దత్త సదిశ $\bar{a}$ యొక్క దిశలో ఉండే యూనిట్ సదిశను $\hat{a}$ తో సూచిస్తూ, క్రింది విధంగా నిర్వచిస్తాం.

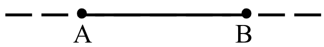
$$\hat{a} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$$

'శూన్య సదిశ'ను $\bar{0}$ తో సూచిస్తాం. శూన్యసదిశ విషయంలో తొలి, తుది బిందువులు ఏకీభవిస్తాయి మరియు శూన్యసదిశ పరిమాణం అదిశ 0 అని గమనించాలి.

- **ఏకదిశ సదిశలు:** రెండు సదిశలు ఒకే దిశను కలిగి ఉంటే, వాటిని ఏకదిశ సదిశలు అని అంటారు.
- **వ్యతిరేక దిశ సదిశలు:** రెండు సదిశలు వ్యతిరేక దిశలను కలిగి ఉంటే, వాటిని వ్యతిరేకదిశ సదిశలు అని అంటారు.

గమనిక: $\bar{a}$ సదిశకు అభిముఖ దిశ (వ్యతిరేక దిశ)లో ఉండే యూనిట్ సదిశ = $\frac{-\bar{a}}{|\bar{a}|}$

- **సదిశకు ఋణసదిశ:-** $\bar{a}$ సదిశతో సమానమైన పరిమాణాన్ని కలిగి, $\bar{a}$ కి వ్యతిరేకదిశలో ఉండే సదిశను $\bar{a}$ యొక్క ఋణసదిశ అంటారు. దీనిని $-\bar{a}$ సూచిస్తాం.

  $\bar{a} = \overline{AB}$ అయితే, $-\bar{a} = \overline{BA}$ అవుతుంది.
- సరళరేఖ AB ని $\overline{AB}$ సదిశకు ఆధారం అంటాం. 

- **సరేఖీయ (సమాంతర) సదిశలు:** ఒకే ఆధారం లేదా సమాంతర ఆధారాలు గల సదిశలను సరేఖీయ సదిశలు (సమాంతర సదిశలు) అంటారు.

గమనిక: 1) $\bar{a}$, $\bar{b}$ లు సరేఖీయ (సమాంతర) సదిశలు $\Leftrightarrow \bar{a} = \lambda \bar{b}$

ఇందులో λ ఒక అదిశ.

2) A, B, C బిందువులు సరేఖీయ బిందువులు $\Leftrightarrow \overline{AB} = \lambda \overline{BC}$, ఇందులో λ ఒక అదిశ.

3) $a_1 i + a_2 j + a_3 k$ మరియు $b_1 i + b_2 j + b_3 k$ సదిశలు సరేఖీయాలు అయితే, $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$.

- **సతలీయ సదిశలు:** సదిశల ఆధార రేఖలు ఒకే తలంలో ఉన్నా లేదా ఒకే తలానికి సమాంతరంగా ఉన్నా, ఆ సదిశలను సతలీయ సదిశలు అంటారు.

గమనిక: 1) A, B, C, D సతలీయ బిందువులు $\Leftrightarrow \overline{AD} = x\overline{AB} + y\overline{AC}$, ఇందులో x, y లు అదిశలు.

2) $\overline{AB} = a_1 i + b_1 j + c_1 k$

$\overline{AC} = a_2 i + b_2 j + c_2 k$

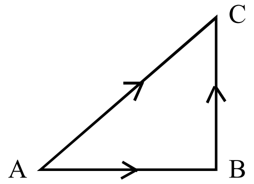
$\overline{AD} = a_3 i + b_3 j + c_3 k$

$\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ లు సతలీయాలు $\Leftrightarrow$ A, B, C, D సతలీయ బిందువులు $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

- సతలీయ సదిశలు కాని వాటిని అతలీయ సదిశలు అంటారు.
- **సదిశా సంకలన త్రిభుజ న్యాయం:** ΔABCలో $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ సదిశల సంకలనం (ఫలిత సదిశ) $\overline{AC}$ అవుతుంది. అనగా,

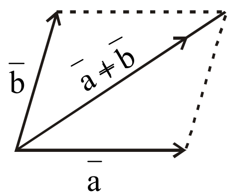
  $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$

  దీనినే సదిశా సంకలన త్రిభుజ న్యాయం అంటారు.



- **సదిశా సంకలన సమాంతర చతుర్భుజ న్యాయం:**

  పరిమాణం, దిశలలో ఒక సమాంతర చతుర్భుజం రెండు ఆసన్న భుజాలను $\bar{a}$, $\bar{b}$ సదిశలు సూచిస్తే, వాటి మొత్తం $\bar{a}+\bar{b}$ ని, పరిమాణం, దిశలో ఆ రెండు సదిశల ఉమ్మడి బిందువు గుండా పోయే సమాంతర చతుర్భుజ కర్ణంతో సూచించవచ్చు. దీనినే సదిశా సంకలన సమాంతర చతుర్భుజ న్యాయం అంటారు.



- **సదిశ సంకలన ధర్మాలు:**

(i) $\bar{a}+\bar{b} = \bar{b}+\bar{a}$ (వినిమయ ధర్మం)

(ii) $\bar{a}+\left(\bar{b}+\bar{c}\right)=\left(\bar{a}+\bar{b}\right)+\bar{c}$ (సాహచర్య ధర్మం)

(iii) $\bar{a}+\bar{0}=\bar{0}+\bar{a}=\bar{a}$ (తత్సమ ధర్మం)

ఇక్కడ శూన్య సదిశ $\bar{0}$ ని, సదిశా సంకలనానికి 'సంకలన తత్సమం' అంటారు.

- $\bar{a}, \bar{b}$ లు రెండు సదిశలైతే,

(i) $\left|\bar{a}+\bar{b}\right| \le \left|\bar{a}\right|+\left|\bar{b}\right|$

(ii) $\left|\left|\bar{a}\right|-\left|\bar{b}\right|\right| \le \left|\bar{a}-\bar{b}\right|$

గమనిక: $\bar{a}$, $\bar{b}$ లు ఏకదిశా సదిశలు అయినప్పుడు మాత్రమే సమానత వర్తిస్తుంది.

- $\bar{a}$, $\bar{b}$ లు స్థానసదిశలుగా గల బిందువులు A, B అయి, $\overline{AB}$ రేఖాఖండాన్ని P బిందువు $m : n$ నిష్పత్తిలో విభజిస్తే P యొక్క స్థానసదిశ $\dfrac{m\bar{b}+n\bar{a}}{m+n}$ అవుతుంది.
- **సదిశల రుజు సంయోగం:** $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3} \,.......\, \overline{a_n}$ లు సదిశలు, $x_1, x_2, x_3 \,.....\,, x_n$ అదిశలు అనుకుందాం. అప్పుడు, సదిశ $x_1\overline{a_1} + x_2\overline{a_2} + x_3\overline{a_3} + ... + x_n\overline{a_n}$ ను $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3} \,.......,\, \overline{a_n}$ సదిశల రుజుసంయోగం అంటారు.
- $A\left(\bar{a}\right)$ బిందువు గుండా పోతూ $\bar{b}$కు సమాంతరంగా ఉండే రేఖ సదిశా సమీకరణం,

  $\bar{r} = \bar{a} + t\bar{b}, \quad t \in R$

- $A(\bar{a})$, $B(\bar{b})$ బిందువుల గుండా పోయే రేఖ సదిశా సమీకరణం,

  $\bar{r} = (1\text{-}t)\bar{a} + t\bar{b}$, $t \in R$

- $A(\bar{a})$ బిందువు గుండా పోతూ, $\bar{b}, \bar{c}$ సదిశలకు సమాంతరంగా ఉండే తలం సదిశా సమీకరణం,

  $\bar{r} = \bar{a} + t\bar{b} + s\bar{c}$, $t, s \in R$

- $A(\bar{a})$, $B(\bar{b})$ బిందువు గుండా పోతూ, $\bar{c}$ సదిశలకు సమాంతరంగా ఉండే తలం సదిశా సమీకరణం,

  $\bar{r} = (1\text{-}t)\,\bar{a} + t\bar{b} + s\bar{c}$, $t, s \in R$

- $A(\bar{a})$, $B(\bar{b})$, $C(\bar{c})$ బిందువుల గుండా పోయే తలం సదిశా సమీకరణం,

  $\bar{r} = (1\text{-}t\text{-}s)\,\bar{a} + t\bar{b} + s\bar{c}$, $t, s \in R$

VERY SHORT ANSWER TYPE QUESTIONS

1) సదిశ $\bar{a} = 2i + 3j + k$ దిశలో యూనిట్ సదిశను కనుక్కోండి.

సాధన: $\bar{a} = 2i + 3j + k$

$$|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$$

$\therefore$ సదిశ $\bar{a}$ దిశలో యూనిట్ సదిశ, $\hat{a} = \dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \dfrac{2i+3j+k}{\sqrt{14}}$

$$\Rightarrow \hat{a} = \frac{2}{\sqrt{14}}i + \frac{3}{\sqrt{14}}j + \frac{1}{\sqrt{14}}k$$

2) $\bar{a} = i + 2j + 3k$, $\bar{b} = 3i + j$ అనుకోండి. $\bar{a} + \bar{b}$ దిశలో యూనిట్ సదిశను కనుక్కోండి.

సాధన: $\bar{a} = i + 2j + 3k$

$\bar{b} = 3i + j$

$\bar{a} + \bar{b} = i + 2j + 3k + 3i + j$

$\therefore \bar{a} + \bar{b} = 4i + 3j + 3k$

$$|\bar{a} + \bar{b}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{16+9+9} = \sqrt{34}$$

$\therefore$ $|\bar{a} + \bar{b}|$ దిశలో యూనిట్ సదిశ = $\dfrac{\bar{a} + \bar{b}}{|\bar{a} + \bar{b}|} = \dfrac{4i+3j+3k}{\sqrt{34}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{34}}(4i+3j+3k)$$

3) $\bar{a} = 2i + 2j - 5k$, $\bar{b} = 2i + j + 3k$ సదిశల సంకలన దిశలోని యూనిట్ సదిశను కనుక్కోండి.

సాధన: $\bar{a} = 2i + 2j - 5k$, $\bar{b} = 2i + j + 3k$

దత్త సదిశల మొత్తం, $\bar{a}+\bar{b} = 2i + 2j - 5k + 2i + j + 3k$

$\bar{a}+\bar{b} = 4i + 3j - 2k$

$|\bar{a}+\bar{b}| = \sqrt{4^2+3^2+(-2)^2} = \sqrt{16+9+4} = \sqrt{29}$

$\bar{a}, \bar{b}$ సదిశల సంకలన దిశలోని యూనిట్ సదిశ = $\dfrac{\bar{a}+\bar{b}}{|\bar{a}+\bar{b}|} = \dfrac{4i+3j-2k}{\sqrt{29}}$

4) $\bar{a}=2i+4j-5k$, $\bar{b}=i+j+k$, $\bar{c}=j+2k$ **అయితే,** $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ **సదిశకు అభిముఖ దిశలో యూనిట్ సదిశను కనుక్కోండి.**

సాధన: $\bar{a}=2i+4j-5k$

$\bar{b}=i+j+k$

$\bar{c}=j+2k$

$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c} = (2i + 4j - 5k) + (i + j + k) + (j + 2k)$

$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c} = 3i + 6j - 2k$

$|\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}| = \sqrt{3^2+6^2+(-2)^2} = \sqrt{9+36+4} = \sqrt{49} = 7$

$\therefore$ $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ సదిశకు అభిముఖదిశ (వ్యతిరేకదిశ)లో ఉండే యూనిట్ సదిశ

$= -\dfrac{(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})}{|\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}|}$

$= -\dfrac{(3i + 6j - 2k)}{7}$

5) **A, B, C బిందువుల స్థాన సదిశలు వరుసగా $-2i + j - k$, $-4i + 2j + 2k$, $6i - 3j - 13k$ అవుతూ, $\overline{AB} = \lambda\overline{AC}$ అయితే, λ విలువను కనుక్కోండి.**

సాధన: 'O' ను మూలబిందువు అనుకుందాం.

అప్పుడు, $\overline{OA} = -2i + j - k$

$\overline{OB} = -4i + 2j + 2k$

$\overline{OC} = 6i - 3j - 13k$

$\therefore \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (-4i + 2j + 2k) - (-2i + j - k)$

$= -4i + 2j + 2k + 2i - j + k$

$\therefore \overline{AB} = -2i + j + 3k$

$\therefore \overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = (6i - 3j - 13k) - (-2i + j - k)$

$= 6i - 3j - 13k + 2i - j + k$

$= 8i - 4j - 12k$

$\overline{AC} = -4(-2i + j + 3k)$

$\overline{AC} = -4.\ \overline{AB}$ $\left[\because \overline{AB} = -2i + j + 3k\right]$

$\Rightarrow$ $-4\,\overline{AB} = \overline{AC}$

$\overline{AB} = -\frac{1}{4}\,\overline{AC}$

$\therefore\ \overline{AB} = \lambda\ \overline{AC}$ తో పై సమీకరణాన్ని పోల్చగా, $\lambda = -\frac{1}{4}$

6) $\overline{OA} = i + j + k$, $\overline{AB} = 3i - 2j + k$, $\overline{BC} = i + 2j - 2k$, $\overline{CD} = 2i + j + 3k$ **అయితే** $\overline{OD}$ **సదిశను కనుక్కోండి.**

సాధన: $\overline{OA} = i + j + k$

$\overline{AB} = 3i - 2j + k$

$\overline{BC} = i + 2j - 2k$

$\overline{CD} = 2i + j + 3k$

$\overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{OD}$ కావున,

$\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$

$= (i + j + k) + (3i - 2j + k) + (i + 2j - 2k) + (2i + j + 3k)$

$\therefore\ \overline{OD} = 7i + 2j + 3k$

7) **సదిశ** $\bar{a} = i + j - 2k$ **యొక్క దిక్ నిష్పత్తులను రాసి, తద్వారా దాని దిక్ కొసైన్లను గణన చేయండి.**

సాధన: $\bar{r} = \bar{a} = i + j - 2k$ అనుకొనుము

సదిశ $\bar{r} = xi + yj + zk$ యొక్క దిక్ నిష్పత్తులు a, b, c

వరుసగా x, y, z అవుతాయి కావున, దత్త సదిశకి దిక్ నిష్పత్తులు, $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$ అవుతాయి.

దత్త సదిశకు l, m, n దిక్ కొసైన్లు అయితే,

$|\bar{r}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$ కావున,

$$l = \frac{a}{|\bar{r}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$m = \frac{b}{|\bar{r}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$n = \frac{c}{|\bar{r}|} = \frac{-2}{\sqrt{6}}$$

$\therefore$ దత్త సదిశ దిక్ కొసైన్లు $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$

8) సదిశలు $-3i + 4j + \lambda k$, $\mu i + 8j + 6k$ సరేఖీయాలైతే λ, μ లను కనుక్కోండి

సాధన: సదిశలు $-3i + 4j + \lambda k$, $\mu i + 8j + 6k$ లు సరేఖీయాలు కావున

$$\frac{-3}{\mu} = \frac{4}{8} = \frac{\lambda}{6}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-3}{\mu} = \frac{1}{2} = \frac{\lambda}{6}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-3}{\mu} = \frac{1}{2} \text{ మరియు } \frac{1}{2} = \frac{\lambda}{6}$$

$$\Rightarrow \quad \mu = 2(-3) \qquad 2\lambda = 6(1)$$

$$\Rightarrow \quad \mu = -6 \qquad \lambda = \frac{6}{2} = 3$$

$\therefore$ $\lambda = 3$ మరియు $\mu = -6$

9) $2i + 3j + k$ బిందువు గుండా పోతూ, $4i - 2j + 3k$ సదిశకు సమాంతరంగా ఉండే రేఖ సదిశా సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన: $\bar{a} = 2i + 3j + k$

$\bar{b} = 4i - 2j + 3k$ అనుకొనుము

$\bar{a}$ బిందువు గుండా పోతూ $\bar{b}$ కు సమాంతరంగా ఉండే రేఖ సదిశా సమీకరణం,

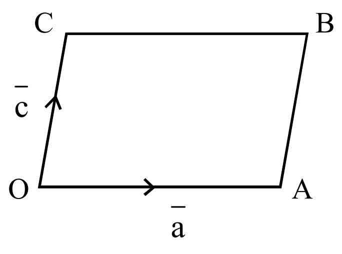
$\bar{r} = \bar{a} + t\bar{b}$, $t \in R$

$\bar{r} = (2i + 3j + k) + t(4i - 2j + 3k)$

$\Rightarrow \quad \bar{r} = (2 + 4t)i + (3-2t)j + (1+3t)k$

10) OABC సమాంతర చతుర్భుజంలో, $\overline{OA} = \bar{a}$, $\overline{OC} = \bar{c}$ అయితే $\overline{BC}$ రేఖ సదిశా సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: OABC సమాంతర చతుర్భుజంలో,



$\overline{OA} = \bar{a}$

$\overline{OC} = \bar{c} \Rightarrow \overline{AB} = \bar{c}$

$\Rightarrow \quad \overline{OB} - \overline{OA} = \bar{c}$

$\Rightarrow \quad \overline{OB} = \bar{c} + \overline{OA}$

$\Rightarrow \quad \overline{OB} = \bar{c} + \bar{a}$

$\therefore \overline{OB} = \bar{a} + \bar{c}$

$\therefore$ $\overline{BC}$ రేఖ సదిశా సమీకరణం, $\bar{r} = (1\text{-}t)\bar{c} + t(\bar{a} + \bar{c})$, $t \in R$

$\Rightarrow \quad \bar{r} = (1\text{-}t\text{+}t)\bar{c} + t\,\bar{a}$

$\Rightarrow \quad \bar{r} = \bar{c} + t\,\bar{a}$

11) 2i + j + 3k, –4i + 3j – k బిందువులను కలిపే రేఖ సదిశా సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: $\bar{a} = 2i + j + 3k$

$\bar{b} = -4i + 3j - k$ అనుకొనుము.

$\bar{a}, \bar{b}$ బిందువుల గుండాపోయే రేఖ సదిశా సమీకరణం,

$\bar{r} = (1-t)\bar{a} + t\bar{b},\ t \in R$

$\Rightarrow \quad \bar{r} = (1 - t)(2i + j + 3k) + t(-4i + 3j - k)$

$\Rightarrow \quad \bar{r} = (2 - 2t - 4t)i + (1 - t + 3t)j + (3 - 3t - t)k$

$\Rightarrow \quad \bar{r} = (2 - 6t)i + (1 + 2t)j + (3 - 4t)k$

$\Rightarrow \quad \bar{r} = 2(1 - 3t)i + (1 + 2t)j + 3(3 - 4t)k$

12) i – 2j + 5k, –5j – k, –3i + 5j బిందువుల గుండా పోయే తలం సదిశా సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: $\bar{a} = i - 2j + 5k$

$\bar{b} = -5j - k$

$\bar{c} = -3i + 5j$ అనుకొనుము

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ బిందువుల గుండా పోయే తలం సదిశా సమీకరణం,

$\bar{r} = (1-t-s)\bar{a} + t\bar{b} + s\bar{c},\ t, s \in R$

$\Rightarrow \quad \bar{r} = (1 - t - s)(i - 2j + 5k) + t(-5j - k) + s(-3i + 5j)$

13) (0, 0, 0), (0, 5, 0), (2, 0, 1) బిందువుల గుండా పోయే తలం సదిశా సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: $\bar{a} = 0.i + 0.j + 0.k = \bar{0}$

$\bar{b} = 0.i + 5j + 0.k = 5j$

$\bar{c} = 2.i + 0.j + 1.k = 2i + k$

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ బిందువుల గుండా పోయే తలం సదిశా సమీకరణం,

$\bar{r} = (1-t-s)\bar{a} + t\bar{b} + s\bar{c},\ t, s \in R$

$\Rightarrow \quad \bar{r} = (1 - t - s)\ \bar{0} + t(5j) + s(2i + k)$

$\Rightarrow \quad \bar{r} = (5t)j + s(2i + k)$

SHORT ANSWER TYPE QUESTIONS

1) A(2i – j + k), B(i – 3j – 5k), C(3i – 4j – 4k) బిందువులు ఒక లంబకోణ త్రిభుజం శీర్షాలని చూపండి.

సాధన: $\bar{O}$ మూలబిందువు అయితే,

$\overline{OA} = 2i - j + k$

$\overline{OB} = i - 3j - 5k$

$\overline{OC} = 3i - 4j - 4k$

$\therefore \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (i - 3j - 5k) - (2i - j + k)$
$= (1-2)i + (-3+1)j + (-5-1)k$

$\overline{AB} = -i - 2j - 6k$

$\Rightarrow \quad |\overline{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{1+4+36} = \sqrt{41}$

$\overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB} = (3i - 4j - 4k) - (i - 3j - 5k)$

$\overline{BC} = (3 - 1)i + (-4 + 3)j + (-4 + 5)k = 2i - j + k$

$|\overline{BC}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

$\overline{CA} = \overline{OA} - \overline{OC} = (2i - j + k) - (3i - 4j - 4k)$

$\overline{CA} = (2 - 3)i + (-1 + 4)j + (1 + 4)k = -i + 3j + 5k$

$|\overline{CA}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35}$

$|\overline{AB}|^2 = (\sqrt{41})^2 = (\sqrt{6})^2 + (\sqrt{35})^2$

$\Rightarrow \quad |\overline{AB}|^2 = |\overline{BC}|^2 + |\overline{CA}|^2$

$\Rightarrow$ A, B, C బిందువులు లంబకోణ త్రిభుజ శీర్షాలు

2) 3i + 5j + 2k, 2i – 3j – 5k, –5i – 2j + 3k సదిశలతో ఏర్పడే త్రిభుజం, సమబాహు త్రిభుజం అవుతుందా?

సాధన: ΔABC లో $\overline{AB} = 3i + 5j + 2k$

$\overline{BC} = 2i - 3j - 5k$

$\overline{CA} = -5i - 2j + 3k$ అనుకొనుము

$|\overline{AB}| = \sqrt{3^2 + 5^2 + 2^2} = \sqrt{9+25+4} = \sqrt{38}$

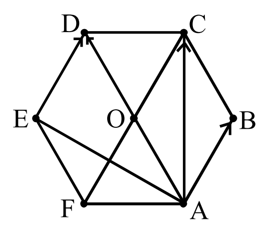
$|\overline{BC}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{4+9+25} = \sqrt{38}$

$|\overline{CA}| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{25+4+9} = \sqrt{38}$

$\therefore \ |\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{CA}|$ కావున, ΔABC సమబాహు త్రిభుజం అవుతుంది.

3) ABCDEF క్రమ షడ్భుజి కేంద్రం O అయితే

AB + AC + AD + AE = 3 AD = 6 AO అని చూపండి.



సాధన: పటం నుండి, AB + AC + AD + AE + AF

= (AB + AE) + AD + (AC + AF)

$= (AE + ED) + AD + (AC + CD)$

$(\because AB = ED, AF = CD)$ (పటం నుండి)

$= AD + AD + AD = 3\,AD$

$= 6\,AO$ ($\because$ O కేంద్రం, $OD = AO$)

4) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ **లు అతలీయ సదిశలైతే ఈ క్రింది నాలుగు బిందువులు సతలీయాలని చూపండి.**

(i) $-\bar{a} + 4\bar{b} - 3\bar{c}$, $3\bar{a} + 2\bar{b} - 5\bar{c}$, $-3\bar{a} + 8\bar{b} - 5\bar{c}$, $-3\bar{a} + 2\bar{b} + \bar{c}$

(ii) $6\bar{a} + 2\bar{b} - \bar{c}$, $2\bar{a} - \bar{b} + 3\bar{c}$, $-\bar{a} + 2\bar{b} - 4\bar{c}$, $-12\bar{a} - \bar{b} - 3\bar{c}$

సాధన: "O" ను మూలబిందువు అనుకుందాం. A, B, C, D బిందువుల స్థానసదిశలు వరుసగా,

$\overline{OA} = -\bar{a} + 4\bar{b} - 3\bar{c}$

$\overline{OB} = 3\bar{a} + 2\bar{b} - 5\bar{c}$

$\overline{OC} = -3\bar{a} + 8\bar{b} - 5\bar{c}$

$\overline{OD} = -3\bar{a} + 2\bar{b} + \bar{c}$ అనుకుందాం.

$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (3\bar{a} + 2\bar{b} - 5\bar{c}) - (-\bar{a} + 4\bar{b} - 3\bar{c}) = 4\bar{a} - 2\bar{b} - 2\bar{c}$

$\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = (-3\bar{a} + 8\bar{b} - 5\bar{c}) - (-\bar{a} + 4\bar{b} - 3\bar{c}) = -2\bar{a} + 4\bar{b} - 2\bar{c}$

$\overline{AD} = \overline{OD} - \overline{OA} = (-3\bar{a} + 2\bar{b} + \bar{c}) - (-\bar{a} + 4\bar{b} - 3\bar{c}) = -2\bar{a} - 2\bar{b} + 4\bar{c}$

A, B, C, D బిందువులు సతలీయాలు $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 4(16-4) + 2(-8-4) - 2(4+8)$$

$= 4(12) + 2(-12) - 2(12)$

$= 48 - 24 - 24$

$= 0$

$\Rightarrow$ A, B, C, D బిందువులు సతలీయాలు

రెండవ పద్ధతి:-

A, B, C, D బిందువులు సతలీయాలు $\Leftrightarrow \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ లు సతలీయాలు

$\Leftrightarrow \overline{AB} = x\overline{AC} + y\overline{AD}$

ఇందులో x, y లు అదిశలు

$\Rightarrow \quad 4\bar{a} - 2\bar{b} - 2\bar{c} = x(-2\bar{a} + 4\bar{b} - 2\bar{c}) + y(-2\bar{a} - 2\bar{b} + 4\bar{c})$

$\Rightarrow \quad 4\bar{a} - 2\bar{b} - 2\bar{c} + 2\bar{a}x - 4\bar{b}x + 2\bar{c}x + 2\bar{a}y + 2\bar{b}y - 4\bar{c}y = 0$

$\Rightarrow \quad (4+2x+2y)\bar{a} + (-2-4x+2y)\bar{b} + (-2+2x-4y)\bar{c} = 0$

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ లు అతలీయ సదిశలు కావున,

$4 + 2x + 2y = 0$ ....(1)

$-2 - 4x + 2y = 0$ ....(2)

$-2 + 2x - 4y = 0$ ....(3)

(1), (2) లను సాధించగా,

$$\begin{array}{r} 2x + 2y + 4 = 0 \\ -4x + 2y - 2 = 0 \\ + \quad - \quad\quad + \\ \hline 6x \quad\quad + 6 = 0 \end{array}$$

$x = -6/6 = -1$

$x = -1$ ను (1) వ సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా,

$4 + 2(-1) + 2y = 0$

$4 - 2 + 2y = 0$

$2 + 2y = 0$

$2y = -2$

$y = -2/2 = -1$

$x = -1, y = -1$ లను (3) వ సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా,

$-2 + 2(-1) - 4(-1) = -2-2+4=-4+4= 0$

$\therefore \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ లు సతలీయాలు

$\Rightarrow$ A, B, C, D బిందువులు సతలీయాలు

$\therefore$ దత్త బిందువులు సతలీయాలు

(ii) "O"ను మూలబిందువు అనుకుందాం. A, B, C, D బిందువుల స్థానసదిశలు వరుసగా,

$\overline{OA} = 6\bar{a} + 2\bar{b} - \bar{c}$

$\overline{OB} = 2\bar{a} - \bar{b} + 3\bar{c}$

$\overline{OC} = -\bar{a} + 2\bar{b} - 4\bar{c}$

$\overline{OD} = -12\bar{a} - \bar{b} - 3\bar{c}$ అనుకుందాం.

$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (2\bar{a} - \bar{b} + 3\bar{c}) - (6\bar{a} + 2\bar{b} - \bar{c}) = -4\bar{a} - 3\bar{b} + 4\bar{c}$

$\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = (-\bar{a} + 2\bar{b} - 4\bar{c}) - (6\bar{a} + 2\bar{b} - \bar{c}) = -7\bar{a} - 3\bar{c}$

$\overline{AD} = \overline{OD} - \overline{OA} = (-12\bar{a} - \bar{b} - 3\bar{c}) - (6\bar{a} + 2\bar{b} - \bar{c}) = -18\bar{a} - 3\bar{b} - 2\bar{c}$

A, B, C, D బిందువులు సతలీయాలు $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -4 & -3 & 4 \\ -7 & 0 & -3 \\ -18 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} -4 & -3 & 4 \\ -7 & 0 & -3 \\ -18 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -4(0-9)+3(14-54)+4(21-0)$$

$= 36 + 3(-40) + 4(21)$
$= 36 - 120 + 84$
$= 120 - 120$
$= 0$

$\Rightarrow$ A, B, C, D బిందువులు సతలీయాలు

5) i, j, k లు ధన నిరూపకాక్షాల వెంబడి యూనిట్ సదిశలైతే, 4i + 5j + k, –j–k, 3i +9 j + 4k, –4i + 4j + 4k అనే నాలుగు బిందువులు సతలీయాలని చూపండి.

సాధన: "O"ను మూలబిందువు అని, దత్త బిందువులను A, B, C, D అని అనుకుందాం. అప్పుడు,

$\overline{OA} = 4i + 5j + k$

$\overline{OB} = -j - k$

$\overline{OC} = 3i + 9j + 4k$

$\overline{OD} = -4i + 4j + 4k$

$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (-j - k) - (4i + 5j + k) = -4i - 6j - 2k$

$\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = (3i + 9j + 4k) - (4i + 5j + k) = -i + 4j + 3k$

$\overline{AD} = \overline{OD} - \overline{OA} = (-4i + 4j + 4k) - (4i + 5j + k) = -8i - j + 3k$

A, B, C, D బిందువులు సతలీయాలు $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -4 & -6 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ -8 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$$\because \begin{vmatrix} -4 & -6 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ -8 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -4(12+3)+6(-3+24)-2(1+32)$$

$= -4(15) + 6(21) - 2(33)$

$= -60 + 126 - 66$

$= - 126 + 126$

$= 0$

$\Rightarrow$ A, B, C, D బిందువులు సతలీయాలు

6) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ **లు అతలీయ సదిశలైతే ఈ కింద ఇచ్చిన స్థాన సదిశల బిందువుల సరేఖీయతను పరీక్షించండి.**

(i) $\bar{a} - 2\bar{b} + 3\bar{c},\ 2\bar{a} + 3\bar{b} - 4\bar{c},\ -7\bar{b} + 10\bar{c}$

(ii) $3\bar{a} - 4\bar{b} + 3\bar{c}$, $-4\bar{a} + 5\bar{b} - 6\bar{c}$, $4\bar{a} - 7\bar{b} + 6\bar{c}$

సాధన: (i) 'O' ను మూలబిందువు అని, A,B, C లు దత్త బిందువులు అని అనుకుందాం.

$\overline{OA} = \bar{a} - 2\bar{b} + 3\bar{c}$

$\overline{OB} = 2\bar{a} + 3\bar{b} - 4\bar{c}$

$\overline{OC} = -7\bar{b} + 10\bar{c}$

$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (2\bar{a} + 3\bar{b} - 4\bar{c}) - (\bar{a} - 2\bar{b} + 3\bar{c}) = \bar{a} + 5\bar{b} - 7\bar{c}$ ......(1)

$\overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB} = (-7\bar{b} + 10\bar{c}) - (2\bar{a} + 3\bar{b} - 4\bar{c}) = -2\bar{a} - 10\bar{b} + 14\bar{c}$

$\overline{BC} = -2(\bar{a} + 5\bar{b} - 7\bar{c})$

$\overline{BC} = -2\ \overline{AB}$ [$\because$ from (1)]

$\Rightarrow$ $\overline{BC} = 2\ \overline{BA}$

$\Rightarrow$ A, B, C లు సరేఖీయాలు

(ii) 'O' ను మూలబిందువు అని, A,B, C లు దత్త బిందువులు అని అనుకుందాం.

$\overline{OA} = 3\bar{a} - 4\bar{b} + 3\bar{c}$

$\overline{OB} = -4\bar{a} + 5\bar{b} - 6\bar{c}$

$\overline{OC} = 4\bar{a} - 7\bar{b} + 6\bar{c}$

$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (-4\bar{a} + 5\bar{b} - 6\bar{c}) - (3\bar{a} - 4\bar{b} + 3\bar{c}) = -7\bar{a} + 9\bar{b} - 9\bar{c}$

$\overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB} = (4\bar{a} - 7\bar{b} + 6\bar{c}) - (-4\bar{a} + 5\bar{b} - 6\bar{c}) = 8\bar{a} - 12\bar{b} + 12\bar{c}$

$\overline{AB} \neq \lambda\ \overline{BC}$ కావున, (λ ఒక అదిశ)

A,B, C బిందువులు సరేఖీయాలు కావు

7) 3i–2j–k, 2i+3j–4k,–i+j+2k, 4i+5j+λk సదిశలు స్థానసదిశలుగా గల బిందువులు సతలీయాలైతే λ విలువ $\dfrac{-146}{17}$ అని చూపండి.

సాధన: 'O" ను మూలబిందువు అని, ఇచ్చిన బిందువులను A,B,C,D అని అనుకుందాం.

$\overline{OA} = 3i - 2j - k$

$\overline{OB} = 2i + 3j - 4k$

$\overline{OC} = -i + j + 2k$

$\overline{OD} = 4i + 5j + \lambda k$ అనుకుందాం.

$\Rightarrow$ $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (2i + 3j - 4k) - (3i - 2j - k) = -i + 5j - 3k$

$\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = (-i + j + 2k) - (3i - 2j - k) = -4i + 3j + 3k$

$\overline{AD} = \overline{OD} - \overline{OA} = (4i + 5j + \lambda k) - (3i - 2j - k) = i + 7j + (\lambda + 1)k$

A, B, C, D బిందువులు సతలీయాలు $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1 & 5 & -3 \\ -4 & 3 & 3 \\ 1 & 7 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$

$-1[3(\lambda+1) - 21] - 5[-4(\lambda+1) - 3] - 3[-28-3] = 0$

$-1(3\lambda+3-21) - 5(-4\lambda-4-3) - 3(-31) = 0$

$-1(3\lambda-18) - 5(-4\lambda-7) + 93 = 0$

$-3\lambda + 18 + 20\lambda + 35 + 93 = 0$

$17\lambda + 146 = 0$

$17\lambda = -146$

$\therefore \lambda = -\dfrac{146}{17}$

8) 2i + 4j + 2k, 2i + 3j + 5k బిందువుల గుండా పోతూ, సదిశ 3i – 2j + k కు సమాంతరంగా ఉండే తలం సదిశా సమీకరణం కనుక్కొని, 2i + j + 3k, 4i – 2j + 3k బిందువులను కలిపే రేఖను ఈ తలం ఖండించే బిందువును కూడా కనుక్కోండి.

సాధన: $\bar{a} = 2i + 4j + 2k$

$\bar{b} = 2i + 3j + 5k$

$\bar{c} = 3i - 2j + k$ అనుకొనుము.

$\therefore \bar{a}, \bar{b}$ బిందువుల గుండా పోతూ, సదిశ $\bar{c}$ కు సమాంతరంగా ఉండే తలం

సదిశా సమీకరణం, $\bar{r} = (1-t)\bar{a} + t\bar{b} + s\bar{c}, \quad t, s \in R$

$\bar{r} = (1-t)(2i + 4j + 2k) + t(2i + 3j + 5k) + s(3i - 2j + k)$

$\bar{r} = (2 - 2t + 2t + 3s)i + (4 - 4t + 3t - 2s)j + (2 - 2t + 5t + s)k$

$\bar{r} = (2 + 3s)i + (4 - t - 2s)j + (2 + 3t + s)k$ .... (1)

$\bar{p} = 2i + j + 3k$

$\bar{q} = 4i - 2j + 3k$ అనుకొనుము.

$\bar{p}, \bar{q}$ బిందువుల గుండా పోయే రేఖ సదిశా సమీకరణం,

$\bar{r} = (1-x)\bar{p} + x\bar{q}, \quad x \in R$

$\bar{r} = (1-x)(2i + j + 3k) + x(4i - 2j + 3k)$

$\bar{r} = (2 - 2x + 4x)i + (1 - x - 2x)j + (3 - 3x + 3x)k$

$\bar{r} = (2 + 2x)i + (1 - 3x)j + 3k$ ....(2)

(1), (2) లలో i, j, k అనురూప గుణకాలను సమానం చేస్తే,

$2 + 3s = 2 + 2x \Rightarrow 2x - 3s = 0.$ ....(3)

$4 - t - 2s = 1 - 3x \Rightarrow 3x - 2s - t = -3$ ....(4)

$2 + 3t + s = 3 \Rightarrow s + 3t = 1$

$\Rightarrow 3t = 1 - s \Rightarrow t = \frac{1 - s}{3}$

't' విలువను (4)లో ప్రతిక్షేపించగా,

$3x - 2s - \left(\frac{1 - s}{3}\right) = -3$

$9x - 6s - 1 + s = -9$

$\Rightarrow 9x - 5s = -8$ ....(5)

(3), (5) లను సాధించగా,

$(2x - 3s = 0) \times 5 \Rightarrow 10x - 15s = 0$

$(9x - 5s = -8) \times -3 \Rightarrow -27x + 15s = 24$

$-17x = 24$

$x = \frac{-24}{17}$

$x = \frac{-24}{17}$ ను (2)లో ప్రతిక్షేపించగా,

$\bar{r} = \left(2 + 2\left(\frac{-24}{17}\right)\right)i + \left(1 - 3\left(\frac{-24}{17}\right)\right)j + 3k$

$\bar{r} = \left(2 - \frac{48}{17}\right)i + \left(1 + \frac{72}{17}\right)j + 3k$

$\bar{r} = \left(\frac{34 - 48}{17}\right)i + \left(\frac{17 + 72}{17}\right)j + 3k$

$\Rightarrow \bar{r} = \frac{-14}{17}i + \frac{89}{17}j + 3k$

$\therefore$ తలం, రేఖను ఖండించే బిందువు = $\left(\frac{-14}{17}, \frac{89}{17}, 3\right)$

9) 4i – 3j – k, 3i + 7j – 10k, 2i + 5j – 7k బిందువుల ద్వారా పోయే తలం సదిశా సమీకరణాన్ని కనుక్కొని, i + 2j – 3k బిందువు, ఈ తలంలో ఉంటుందని చూపండి.

సాధన: $\bar{a} = 4i - 3j - k$, $\bar{b} = 3i + 7j - 10k$, $\bar{c} = 2i + 5j - 7k$, $\bar{d} = i + 2j - 3k$ అనుకొనుము.

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ బిందువుల గుండా పోయే తలం సదిశా సమీకరణం,

$\bar{r} = (1 - t - s)\bar{a} + t\bar{b} + s\bar{c} \quad t, s \in R$

$\bar{r} = (1 - t - s)(4i - 3j - k) + t(3i + 7j - 10k) + s(2i + 5j - 7k)$

$\bar{d}$ బిందువు ఈ తలంపై ఉంటే,

$i + 2j - 3k = (1 - t - s)(4i - 3j - k) + t(3i + 7j - 10k) + s(2i + 5j - 7k)$

$i + 2j - 3k = (4 - 4t - 4s + 3t + 2s)i + (-3 + 3t + 3s + 7t + 5s)j + (-1 + t + s - 10t - 7s)k$

$i + 2j - 3k = (4 - t - 2s)i + (-3 + 10t + 8s)j + (-1 - 9t - 6s)k$

i, j, k అనురూప గుణకాలను సమానం చేస్తే,

$4 - t - 2s = 1 \Rightarrow t + 2s = 3$ ....(1)

$-3 + 10t + 8s = 2 \Rightarrow 10t + 8s = 5$ ....(2)

$-1 - 9t - 6s = -3 \Rightarrow 9t + 6s = 2$ ....(3)

(1), (2) లను సాధించగా,

$(t + 2s = 3) \times -4 \Rightarrow -4t - 8s = -12$

$10t + 8s = 5 \Rightarrow 10t + 8s = 5$

$6t = -7$

$\Rightarrow t = \frac{-7}{6}$

(1) నుండి $t + 2s = 3$

$\frac{-7}{6} + 2s = 3$

$2s = 3 + \frac{7}{6} = \frac{18+7}{6}$

$2s = \frac{25}{6} \Rightarrow s = \frac{25}{12}$

(3) నుండి

LHS = $9t + 6s$

$= 9\left(\frac{-7}{6}\right) + 6\left(\frac{25}{12}\right) = \frac{-21}{2} + \frac{25}{2} = \frac{-21+25}{2} = \frac{4}{2} = 2 =$ R.H.S.

$\therefore t = \frac{-7}{6}, s = \frac{25}{12}$ విలువలు (1), (2), (3)లను తృప్తిపరుస్తున్నాయి.

కావున, $\bar{d}$ బిందువు, $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ బిందువుల గుండా పోయే తలంలో ఉంటుంది.

10) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ **లు అతలీయ సదిశలైతే,** $6\bar{a} - 4\bar{b} + 4\bar{c}$, $-4\bar{c}$ **బిందువులను కలిపే రేఖ,** $-\bar{a} - 2\bar{b} - 3\bar{c}$, $\bar{a} + 2\bar{b} - 5\bar{c}$ **బిందువులను కలిపే రేఖల ఖండన బిందువు** $-4c$ **అని చూపండి.**

సాధన: మొదటి జత బిందువులను కలిపే రేఖ సదిశా సమీకరణం,

$\bar{r} = (1 - t)(-4\bar{c}) + t(6\bar{a} - 4\bar{b} + 4\bar{c}), \quad t \in R$

$\bar{r} = (6t)\bar{a} + (-4t)\bar{b} + (-4 + 4t + 4t)\bar{c}$

$\bar{r} = (6t)\bar{a} + (-4t)\bar{b} + (8t-4)\bar{c}$ ....(1)

రెండవ జత బిందువులను కలిపే రేఖ సదిశా సమీకరణం,

$\bar{r} = (1-s)(-\bar{a} - 2\bar{b} - 3\bar{c}) + s(\bar{a} + 2\bar{b} - 5\bar{c}), \quad s \in R$

$\bar{r} = (-1+s+s)\bar{a} + (-2+2s+2s)\bar{b} + (-3+3s-5s)\bar{c}$

$\bar{r} = (2s-1)\bar{a} - (4s-2)\bar{b} + (-2s-3)\bar{c}$ ....(2)

(1), (2) లలో $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ ల అనురూప గుణకాలను సమానం చేస్తే,

$6t = 2s - 1 \quad \Rightarrow \quad 6t - 2s = -1$ ....(3)

$-4t = 4s - 2 \quad \Rightarrow \quad 4t + 4s = 2 \Rightarrow 2t + 2s = 1$ ....(4)

$8t - 4 = -2s - 3 \quad \Rightarrow \quad 8t + 2s = 1$ ....(5)

(3), (4)లను సాధించగా,

$6t - 2s = -1$

$2t + 2s = 1$

$8t = 0 \quad \Rightarrow t = 0$

(4) నుండి, $2t + 2s = 1$

$2(0) + 2s = 1$

$2s = 1 \Rightarrow s = \frac{1}{2}$

$t = 0, s = \frac{1}{2}$ విలువలు (5)వ సమీకరణాన్ని తృపిపరుస్తున్నాయి.

$\therefore$ $t = 0$ విలువను (1)లో వేసినా, లేదా $s = \frac{1}{2}$ విలువను (2)లో వేసినా, దత్త రేఖల ఖండన బిందువు $-4c$ అవుతుంది.

11) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ లు అతలీయ సదిశలైతే సరళరేఖ $\bar{r} = 2\bar{a} + \bar{b} + t(\bar{b} - \bar{c})$, తలం $\bar{r} = \bar{a} + x(\bar{b} + \bar{c}) + y(\bar{a} + 2\bar{b} - \bar{c})$ ని ఖండించే బిందువును కనుక్కోండి.

సాధన: దత్తాంశం నుండి సరళరేఖ, $\bar{r} = 2\bar{a} + \bar{b} + t(\bar{b} - \bar{c})$.................(1)

తలం, $\bar{r} = \bar{a} + x(\bar{b} + \bar{c}) + y(\bar{a} + 2\bar{b} - \bar{c})$ ....(2)

సరళరేఖ, తలం ఖండించుకొనే బిందువు వద్ద,

$2\bar{a} + \bar{b} + t(\bar{b} - \bar{c}) = \bar{a} + x(\bar{b} + \bar{c}) + y(\bar{a} + 2\bar{b} - \bar{c})$ అవుతుంది.

$2\bar{a} + (1+t)\bar{b} - t\bar{c} = (1+y)\bar{a} + (x+2y)\bar{b} + (x-y)\bar{c}$

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ అనురూప గుణకాలను పోలిస్తే,

$2 = 1 + y \Rightarrow \quad y = 2 - 1 = 1 \Rightarrow y = 1$

$1 + t = x + 2y \Rightarrow 1 + t = x + 2(1) \Rightarrow t - x = 1$ ....(3)

$-t = x - y \Rightarrow -t = x - 1 \Rightarrow t + x = 1$ .... (4)

(3) & (4) లను సాధించగా,

$$\begin{array}{l} t - x = 1 \\ t + x = 1 \\ \hline 2t \quad = 2 \end{array}$$

$t = 1$

(4) నుండి,

$t + x = 1$

$1 + x = 1 \Rightarrow x = 1 - 1$

$x = 0$

$\therefore$ $t = 1$ విలువను (1)లో వేసినా, $x = 0, y = 1$ విలువను (2)లో వేసినా, (1), (2)ల ఖండన బిందువు $2\bar{a} + 2\bar{b} - \bar{c}$ అవుతుంది.

*****

యూనిట్ **5**

సదిశల గుణనం

రెండు సదిశల అదిశా లబ్ధం లేదా బిందు లబ్ధం:

$\bar{a}$, $\bar{b}$ లు సదిశలు, వాటి మధ్యకోణం θ అనుకుందాం. $\bar{a}$, $\bar{b}$ ల అదిశాలబ్ధం లేదా బిందు లబ్ధాన్ని $\bar{a}.\bar{b}$గా రాస్తూ కింది విధంగా నిర్వచిస్తాం.

$\bar{a}.\bar{b} = 0$, $\bar{a}$, $\bar{b}$ ఏదైనా ఒకటి $\bar{0}$ అయితే

$= |\bar{a}||\bar{b}|\text{Cos}\theta$, $\bar{a} \neq 0 \neq \bar{b}$ అయి, $\bar{a}$ $\bar{b}$ల మధ్యకోణం 'θ' అయితే

Note:

(i) $\bar{a}.\bar{b}$ అదిశ

(ii) $\bar{a}$, $\bar{b}$ లు శూన్యేతర సదిశలై, వాటి మధ్యకోణం θ లఘుకోణం లేదా లంబకోణం లేదా గురుకోణం అయినపుడు వరుసగా

$\bar{a}.\bar{b} > 0$

$\bar{a}.\bar{b} = 0$

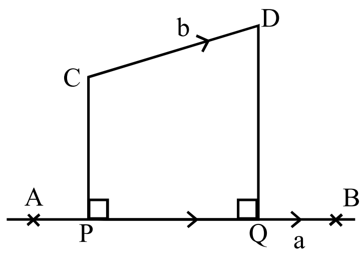
$\bar{a}.\bar{b} < 0$

(iii) $\theta = 0^0 \Rightarrow \bar{a}.\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|$

ప్రత్యేకించి, $\bar{a}.\bar{a} = |\bar{a}||\bar{a}|\cos 0^o = |\bar{a}|.|\bar{a}|$

$\bar{a}.\bar{a} = |\bar{a}|^2$

లంబ విక్షేపం



$\bar{a} = AB$

$\bar{b} = CD$ లు రెండు శూన్యేతర సదిశలు

C, D బిందువుల నుంచి AB రేఖకు గీసిన లంబపాదాలు వరుసగా P, Q అయితే $\overline{PQ}$ సదిశను $\bar{a}$ పై $\bar{b}$ లంబవిక్షేప సదిశ అని, $|\overline{PQ}|$ ను $\bar{a}$ పై $\bar{b}$ లంబ విక్షేప పరిమాణం అని అంటారు.

1. $\bar{a}$ పై $\bar{b}$ **యొక్క లంబవిక్షేప సదిశ =** $\dfrac{(\bar{b}.\bar{a})\bar{a}}{|\bar{a}|^2}$

దాని పరిమాణం = $\dfrac{|\bar{b}.\bar{a}|}{|\bar{a}|}$

2. $\bar{b}$ పై $\bar{a}$ **యొక్క విక్షేప సదిశ =** $\dfrac{(\bar{a}.\bar{b})\bar{b}}{|\bar{b}|^2}$

పరిమాణం = $\dfrac{|\bar{a}.\bar{b}|}{|\bar{b}|}$

3. $\bar{a}, \bar{b}$ **లు రెండు సదిశలు అప్పుడు**

(i) $\bar{a}.\bar{b} = \bar{b}.\bar{a}$ (వినిమయ న్యాయం)

(ii) $(l\bar{a}).\bar{b} = \bar{a}.(l\bar{b}) = l(\bar{a}.\bar{b}),\ l \in R.$

(iii) $(l\bar{a}).(m\bar{b}) = lm(\bar{a}.\bar{b}),\ l, m \in R$

(iv) $(-\bar{a}).(\bar{b}) = \bar{a}.(-\bar{b}) = -(\bar{a}.\bar{b})$

(v) $(-\bar{a}).(-\bar{b}) = \bar{a}.\bar{b}$

Note: i, j, k పరస్పర లంబ యూనిట్ సదిశలు అయితే

$i.i = j.j = k.k = 1$

$i.j = j.k = k.i = 0$

సిద్ధాంతం: $\bar{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 \bar{k}$

$\bar{b} = b_1 i + b_2 j + b_3 \bar{k}$ అయితే

$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Note: (i) $\bar{a}, \bar{b}$ **శూన్యేతర సదిశల మధ్యకోణం 'θ' అయితే**

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\bar{a}.\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}\right)$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}\right)$$

(ii) $\bar{a}, \bar{b}$ పరస్పర లంబ సదిశలు $\Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

రెండు సదిశల సదిశాలబ్ధం (వజ్ర లబ్ధం)

$\bar{a}$, $\bar{b}$ లు సరేఖీయాలు కాని శూన్యేతర సదిశలు, వాటి మధ్యకోణం θ. $\bar{n}$ అనే యూనిట్ సదిశ $\bar{a}$, $\bar{b}$ లు రెండింటికీ లంబంగా ఉంటూ ($\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{n}$) కుడిచేతి వ్యవస్థ అయితే $\bar{a} \times \bar{b}$ని, $|\bar{a}||\bar{b}| \sin\theta\, \bar{n}$ గా నిర్వచిస్తాం.

$\bar{a} \times \bar{b}$ ను $\bar{a}$, $\bar{b}$ల వజ్రలబ్ధం అంటారు.

$\bar{a}$, $\bar{b}$ లలో ఒక సదిశ శూన్య సదిశ లేదా $\bar{a}$, $\bar{b}$ లు సరేఖీయ సదిశలు అయితే $\bar{a} \times \bar{b}$ని శూన్యసదిశ $\bar{0}$గా నిర్వచిస్తాం.

Note:

(1) $\bar{a}$, $\bar{b}$ లు శూన్యేతర సరేఖీయాలు కాని సదిశలైతే

$\bar{a} \times \bar{b}$ సదిశ $\bar{a}$, $\bar{b}$ లతో నిర్ధారితమైన తలానికి లంబంగా ఉంటూ $|\bar{a}||\bar{b}| \sin\theta$ పరిమాణం కల్గి ఉంటుంది.

(2) $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$

(3) $(-a) \times \bar{b} = a \times (-\bar{b}) = -(\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{b} \times \bar{a}$

(4) $(-\bar{a}) \times (-\bar{b}) = \bar{a} \times \bar{b}$

(5) $(l\bar{a}) \times (\bar{b}) = l(\bar{a} \times \bar{b}) = a \times (l\bar{b}),\ l \in R$

(6) $(l\bar{a}) \times (m\bar{b}) = lm(\bar{a} \times \bar{b}),\ l, m \in R$

(7) $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$

(8) $(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = (\bar{a} \times \bar{c}) + (\bar{b} \times \bar{c})$

(9) (i, j, k) లంబత్రయం అనుకుంటే,

(i) $i \times i = j \times j = k \times k = 0$

(ii) $i \times j = k,\ j \times k = i,\ k \times i = j$

సిద్ధాంతం: $\bar{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$

$\bar{b} = b_1 i + b_2 j + b_3 \bar{k}$ అయితే

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

సిద్ధాంతం: $\bar{a}, \bar{b}$ **లు ఏ రెండు సదిశలైనా,**

$$|\bar{a} \times \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 - (\bar{a} \cdot \bar{b})^2$$

సిద్ధాంతం: ΔABC **యొక్క సదిశా వైశాల్యం**

$$= \frac{1}{2}\left(\overline{AB} \times \overline{AC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{BC} \times \overline{BA}\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{CA} \times \overline{CB}\right)$$

సిద్ధాంతం: ΔABC **శీర్షాలైన** A, B, C **ల స్థాన సదిశలు అపసవ్యదిశలో వరుసగా** $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ **అయితే** ΔABC సదిశా వైశాల్యం

$$= \frac{1}{2}\left(\bar{b} \times \bar{c} + \bar{c} \times \bar{a} + \bar{a} \times \bar{b}\right)$$

మరియు ΔABC వైశాల్యం $= \frac{1}{2}\left|\bar{b} \times \bar{c} + \bar{c} \times \bar{a} + \bar{a} \times \bar{b}\right|$

సిద్ధాంతం:

ABCD **చతుర్భుజం కర్ణాలు** $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ **లు అయితే**

(i) **చతుర్భుజం సదిశా వైశాల్యం** $= \frac{1}{2}\left(\overline{AC} \times \overline{BD}\right)$

(ii) **ABCD చతుర్భుజం వైశాల్యం** $= \frac{1}{2}\left|\overline{AC} \times \overline{BD}\right|$

(iii) $\bar{a}, \bar{b}$ **లు ఆసన్న భుజాలుగా గల సమాంతర చతుర్భుజం**

సదిశా వైశాల్యం $= \bar{a} \times \bar{b}$

వైశాల్యం = $|\bar{a} \times \bar{b}|$

(iv) $\bar{a}, \bar{b}$ లు రెండింటికీ లంబంగా ఉండే

యూనిట్ సదిశ $= \pm\frac{(\bar{a} \times \bar{b})}{|\bar{a} \times \bar{b}|}$

1. $\bar{a} = 6i + 2j + 3k$, $\bar{b} = 2i - 9j + 6k$ **అయితే** $\bar{a} \cdot \bar{b}$ **విలువను కనుక్కొని** $\bar{a}, \bar{b}$ **ల మధ్య కోణాన్ని కనుక్కోండి. (4M)**

Sol: $\bar{a} = 6i + 2j + 3k$, $\bar{b} = 2i - 9j + 6k$ అయితే

$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ & $|\bar{a}| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}}$

$\bar{a} \cdot \bar{b} = 6(2) + 2(-9) + 3(6) = 12 - 18 + 18 = 12$

$|\bar{a}| = \sqrt{36+4+9} = \sqrt{49} = 7$

$|\bar{b}| = \sqrt{2^2 + (-9)^2 + 6^2} = \sqrt{4+81+36} = \sqrt{121} = 11$

$$\text{Cos}\,\theta = \frac{\bar{a}\,.\,\bar{b}}{\left(|\bar{a}||\bar{b}|\right)} = \frac{12}{7 \times 11} = \frac{12}{77}$$

$$\theta = \text{Cos}^{-1}\left(\frac{12}{77}\right)$$

2. $\bar{a} = i + 2j - 3k$, $\bar{b} = 3i - j + 2k$ **అయితే** $\bar{a} + \bar{b}$, $\bar{a} - \bar{b}$ **సదిశలు పరస్పరం లంబంగా ఉంటాయని చూపండి. (4 M)**

Sol: $\bar{a} + \bar{b} = i + 2j - 3k + 3i - j + 2k = 4i + j - k$

$\bar{a} - \bar{b} = (i + 2j - 3k) - (3i - j + 2k) = -2i + 3j - 5k$

$(\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{a} - \bar{b}) = 4(-2) + 1(3) + (-1)(-5)$

$= -8 + 3 + 5$

$= 0$ $\quad [\because \bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \Rightarrow \bar{a} \perp \bar{b}]$

$\therefore (\bar{a} + \bar{b}) \perp (\bar{a} - \bar{b})$

3. $\bar{a} = i - j - k$, $\bar{b} = 2i - 3j + k$ **అయితే** $\bar{a}$ **పై** $\bar{b}$ **యొక్క లంబవిక్షేప సదిశను, దాని పరిమాణాన్ని కనుక్కోండి. (4 M)**

Sol: $\bar{a}$ పై $\bar{b}$ యొక్క లంబ విక్షేప సదిశ = $\dfrac{(\bar{b}.\bar{a})\bar{a}}{|\bar{a}|^2}$

పరిమాణం = $\dfrac{|\bar{b} \,.\, \bar{a}|}{|\bar{a}|}$

$\bar{b} \cdot \bar{a} = (2i - 3j + k) \,.\, (i - j - k)$

$= 2(1) + (-3)(-1) + 1(-1) = 2 + 3 - 1 = 4$

$|\bar{a}| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$\therefore$ లంబ విక్షేప సదిశ = $\dfrac{(\bar{b}.\bar{a})\bar{a}}{|\bar{a}|^2} = \dfrac{4(i-j-k)}{(\sqrt{3})^2} = \dfrac{4(i-j-k)}{3}$

పరిమాణం $= \dfrac{|\bar{b}.\bar{a}|}{|\bar{a}|} = \dfrac{|4|}{|\sqrt{3}|} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

4. λ**i** $-$ **3j** $+$ **5k, 2**λ**i** $-$ λ**j** $-$ **k సదిశలు పరస్పరం లంబ సదిశలైతే** λ **ను కనుక్కోండి. (2 M)**

Sol: $\bar{a}, \bar{b}$ లు లంబ సదిశలైతే $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$

$\therefore (\lambda)(2\lambda) + (-3)(-\lambda) + 5(-1) = 0$

$2\lambda^2 + 3\lambda - 5 = 0$

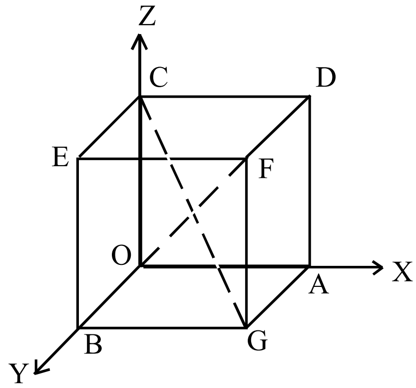
$2\lambda^2 + 5\lambda - 2\lambda - 5 = 0$

$(2\lambda + 5)(\lambda - 1) = 0$

$2\lambda + 5 = 0$ (or) $\lambda - 1 = 0$

$\lambda = \dfrac{-5}{2}$; (or) $\lambda = 1$

5. ఒక ఘనంలో రెండు కర్ణాల మధ్యకోణం θ అయితే $\cos\theta = \frac{1}{3}$ అని చూపండి. (4M)



Sol: ఘనాన్ని యూనిట్ ఘనం అనుకొనుము.

$\overline{OA} = i;\ \overline{OB} = j;\ \overline{OC} = k$ అనుకొనుము.

$\overline{OF}$, $\overline{GC}$ లు కర్ణాలు

$\overline{OF} = OA + AD + DF$

$= i + k + j$

$= i + j + k$

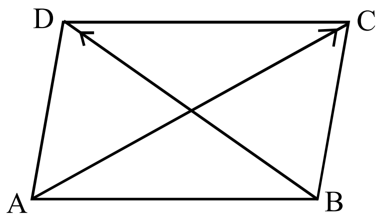
$\overline{GC} = \overline{GB} + \overline{BO} + \overline{OC}$

$= -i - j + k$

$\overline{OF}, \overline{GC}$ ల మధ్య కోణం θ అయితే

$$\text{Cos}\theta = \frac{|\overline{OF}\,.\overline{GC}|}{|\overline{OF}||\overline{GC}|} = \frac{|1(-1)+1(-1)+1(1)|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{|-1-1+1|}{\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

6. ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో $\overline{AB} = 3i - 2j + 2k$, $\overline{AD} = i - 2k$ లు ఆసన్నభుజాలు అయితే, కర్ణాల మధ్య కోణం కనుక్కోండి. (4M)



Sol: $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$

$= 3i - 2j + 2k + i - 2k$

$= 4i - 2j$

$\overline{BD} = BA + AD$

$= -3i + 2j - 2k + i - 2k$

$= -2i + 2j - 4k$

$\overline{AC}$, $\overline{BD}$ ల మధ్య కోణం θ అయితే

$$\text{Cos}\theta = \frac{\overline{AC}.\overline{BD}}{|\overline{AC}|\ |\overline{BD}|} = \frac{4(-2)+(-2)2+0(-4)}{\sqrt{4^2+(-2)^2}\sqrt{(-2)^2+2^2+(-4)^2}}$$

$$\text{Cos}\theta = \frac{-8-4}{\sqrt{16+4}\sqrt{4+4+16}} = \frac{-12}{\sqrt{20}\sqrt{24}} = \frac{-12}{\sqrt{5\times4}\sqrt{6\times4}} = \frac{-12}{4\sqrt{30}} = \frac{-3}{\sqrt{10}.\sqrt{3}}$$

$$\text{Cos}\theta = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$$

7. $4x - 12y - 3z - 7 = 0$ తలానికి సమాంతరంగా ఉంటూ, $A = (2, -1, -4)$ బిందువుగుండా పోయే తలానికి కార్టీసియన్ సమీకరణం కనుక్కోండి. (4M)

Sol: $4x - 12y - 3z - 7 = 0$ తలానికి లంబ సదిశ $4i - 12j - 3\overline{k}$

$P = xi + yj + zk$ అనేది కావలసిన తలంలో ఏదైనా బిందువు అనుకొనుము.

$\overline{AP} \perp \overline{n}$

$\left(\overline{OP} - \overline{OA}\right).\ \overline{n} = 0$

$[(x-2)i + (y+1)j + (z+4)\overline{k}]\ .\ (4i - 12j - 3\overline{k}) = 0$

$4(x-2) - 12(y+1) - 3(z+4) = 0$

$4x - 12y - 3z - 8 - 12 - 12 = 0$

$4x - 12y - 3z - 32 = 0$

8. $i + 2j + 3k, 3i - j + 2k$ సదిశల మధ్య కోణం కనుక్కోండి. (4M)

Sol: $\overline{a} = i + 2j + 3k$, $\overline{b} = 3i - j + 2k$ అనుకొనుము.

$\overline{a}\cdot\overline{b} = 1(3) + 2(-1) + 3(2) = 3 - 2 + 6 = 7$

$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$\left|\overline{b}\right| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$

$\overline{a}$, $\overline{b}$ ల మధ్య కోణం $\theta \Rightarrow \text{Cos}\theta = \dfrac{\overline{a}\ .\ \overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\ \left|\overline{b}\right|}$

$\text{Cos}\theta = \dfrac{7}{\sqrt{14}.\sqrt{14}} = \dfrac{7}{14} = \dfrac{1}{2} = \text{Cos}60^0$

$\theta = 60^0$

9. $2i + \lambda j - k$; $4i - 2j + 2k$ సదిశలు పరస్పరం లంబంగా ఉంటే, λ విలువను కనుక్కోండి. (2M)

Sol: $\overline{a} = 2i + \lambda j - k$; $\overline{b} = 4i - 2j + 2\overline{k}$ అనుకొనుము.

$\overline{a}$, $\overline{b}$ లు పరస్పరం లంబంగా ఉంటే $\overline{a}\cdot\overline{b} = 0$

$\therefore\ 2(4) + \lambda(-2) + (-1)(2) = 0$

$8 - 2\lambda - 2 = 0$

$2\lambda = 6$

$\lambda = 3$

10. λ యొక్క ఏ విలువలకు, $i - \lambda j + 2k, 8i + 6j - k$ సదిశలు లంబంగా ఉంటాయి? (2M)

Sol: $\overline{a} = i - \lambda j + 2k$; $\overline{b} = 8i + 6j - \overline{k}$ అనుకొనుము.

$\overline{a}$, $\overline{b}$ లు పరస్పరం లంబంగా ఉంటే $\overline{a}\cdot\overline{b} = 0$

$\therefore\ 1(8) + (-\lambda)(6) + 2(-1) = 0$

$\Rightarrow 8 - 6\lambda - 2 = 0$

$\Rightarrow 6\lambda = 6$

$\therefore\ \lambda = 1$

11. యూనిట్ సదిశలు e_1, e_2 ల మధ్యకోణం θ అయిన $\frac{1}{2}\left|\overline{e_1} - \overline{e_2}\right| = \text{Sin}\lambda\theta$ అయితే λ విలువ కనుక్కోండి.

(4M)

Sol: $\left|\overline{e_1}\right| = 1;\ \left|\overline{e_2}\right| = 1$

$$\text{Cos}\theta = \frac{\overline{e_1}.\overline{e_2}}{\left|\overline{e_1}\right|\left|\overline{e_2}\right|} = \overline{e_1}.\overline{e_2}$$

$$\frac{1}{2}\left|\overline{e_1} - \overline{e_2}\right| = \text{Sin}\lambda\theta$$

$$\left|\overline{e_1} - \overline{e_2}\right| = 2\text{Sin}\lambda\theta$$

$$\left|\overline{e_1} - \overline{e_2}\right|^2 = 4\text{Sin}^2\lambda\theta \qquad (\because \left|\overline{a}\right|^2 = \overline{a}.\overline{a})$$

$$\left(\overline{e_1} - \overline{e_2}\right).\left(\overline{e_1} - \overline{e_2}\right) = 4\text{Sin}^2\lambda\theta \qquad (\because \overline{e_1}.\overline{e_1} = \left|\overline{e_1}\right|^2)$$

$$\left|\overline{e_1}\right|^2 - \overline{e_1}.\overline{e_2} - \overline{e_2}.\overline{e_1} + \left|\overline{e_2}\right|^2 = 4\text{Sin}^2\lambda\theta \qquad (\because \overline{e_1}.\overline{e_2} = \overline{e_2}.\overline{e_1})$$

$$1 - 2\ \overline{e_1}.\overline{e_2} + 1 = 4\text{Sin}^2\lambda\theta$$

$$2 - 2\text{Cos}\theta = 4\text{Sin}^2\lambda\theta \qquad (\because \overline{e_1}.\overline{e_2} = \cos\theta)$$

$$2(1 - \text{Cos}\theta) = 4\text{Sin}^2\lambda\theta$$

$$2(2\text{Sin}^2\theta/2) = 4\text{Sin}^2\lambda\theta \qquad [\because 1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}]$$

$$\text{Sin}^2\theta/2 = \text{Sin}^2\lambda\theta$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

12. $\overline{a}$ = 2i + 2j – 3k , $\overline{b}$ = 3i – j + 2k సదిశలైతే $2\overline{a} + \overline{b}$, $\overline{a} + 2\overline{b}$ సదిశల మధ్య కోణం కనుక్కోండి.

(4M)

Sol: $2\overline{a} + \overline{b} = 2(2i + 2j - 3k) + 3i - j + 2k = 7i + 3j - 4k$

$\overline{a} + 2\overline{b} = 2i + 2j - 3k + 2(3i - j + 2k) = 8i + k$

వీటి మధ్యకోణం θ అయితే

$$\text{Cos}\theta = \frac{(2\overline{a} + \overline{b})\bullet(\overline{a} + 2\overline{b})}{\left|2\overline{a} + \overline{b}\right|\left|\overline{a} + 2\overline{b}\right|} = \frac{7(8) + 3(0) + (-4)(1)}{\sqrt{7^2 + 3^2 + (-4)^2}.\sqrt{8^2 + 1^2}}$$

$$= \frac{56 - 4}{\sqrt{49 + 9 + 16}.\sqrt{64 + 1}} = \frac{52}{\sqrt{74}.\sqrt{65}}$$

$$\theta = \text{Cos}^{-1}\left(\frac{52}{\sqrt{74}.\sqrt{65}}\right)$$

13. $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=0$, $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=5$, $|\bar{c}|=7$ **అయితే** $\bar{a}, \bar{b}$ **ల మధ్య కోణాన్ని కనుక్కోండి.** (4M)

Sol: $\bar{a}+\bar{b}=-\bar{c}$

$(\bar{a}+\bar{b})^2=(-\bar{c})^2$

$(\bar{a}+\bar{b}).(\bar{a}+\bar{b})=\bar{c}.\bar{c}$

$|\bar{a}|^2+\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{a}+|\bar{b}|^2=|\bar{c}|^2$

$|\bar{a}|^2+2\bar{a}\cdot\bar{b}+|\bar{b}|^2=|\bar{c}|^2$

$2|\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta=|\bar{c}|^2-|\bar{a}|^2-|\bar{b}|^2$

$2(3)(5)\cos\theta=49-9-25$

$30\cos\theta=49-34=15$

$\text{Cos}\theta=\dfrac{15}{30}$

$\text{Cos}\theta=\dfrac{1}{2}=\text{Cos}60^0$

$\theta=60^0$

14. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ **సదిశలు క్రమంగా** $\bar{b}+\bar{c}$, $\bar{c}+\bar{a}$, $\bar{a}+\bar{b}$ **లకు లంబంగా ఉండి** $|a|=2$, $|\bar{b}|=3$ **మరియు** $|\bar{c}|=4$ **అయితే** $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ **పరిమాణం కనుక్కోండి. (4M)**

Sol: $|a|=2$, $|\bar{b}|=3$, $|\bar{c}|=4$

$\bar{a}\perp(\bar{b}+\bar{c}) \Rightarrow \bar{a}.(\bar{b}+\bar{c})=0$

$\bar{a}.\bar{b}+\bar{a}.\bar{c}=0$

$\bar{b}\perp(\bar{c}+\bar{a}) \Rightarrow \bar{b}.(\bar{c}+\bar{a})=0$

$\bar{b}.\bar{c}+\bar{b}.\bar{a}=0$

$\bar{c}\perp(\bar{a}+\bar{b}) \Rightarrow \bar{c}.(\bar{a}+\bar{b})=0$

$\bar{c}.\bar{a}+\bar{c}.\bar{b}=0$

$\bar{a}.\bar{b}+\bar{a}.\bar{c}+\bar{b}.\bar{c}+\bar{b}.\bar{a}+\bar{c}.\bar{a}+\bar{c}.\bar{b}=0$

$2(\bar{a}.\bar{b}+\bar{b}.\bar{c}+\bar{c}.\bar{a})=0 \qquad ....(1)$

$|\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}|^2=(\bar{a}+\bar{b}+\bar{b}).(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})$

$=|\bar{a}|^2+\bar{a}.\bar{b}+\bar{a}.\bar{c}+\bar{b}.\bar{a}+|\bar{b}|^2+\bar{b}.\bar{c}+\bar{c}.\bar{a}+\bar{c}.\bar{b}+|\bar{c}|^2$

$=|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+|\bar{c}|^2+2(\bar{a}.\bar{b}+\bar{b}.\bar{c}+\bar{c}.\bar{a})$

$=2^2+3^2+4^2+2(0)$ [$\because$ (1) నుండి]

$=4+9+16=29$

$\therefore |\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}|=\sqrt{29}$

15. (5,−1,1), (7,−4,7), (1,−6,10), (−1,−3,4) బిందువులు ఒక సమచతురస్రం శీర్షాలు అవుతాయని చూపండి. (7M)

Sol $OA = 5i - j + k$

$OB = 7i - 4j + 7k$

$OC = i - 6j + 10k$

$OD = -i - 3j + 4k$ అనుకొనుము.

$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = 2i - 3j + 6k$

$\overline{BD} = \overline{OD} - \overline{OB} = -8i + j - 3k$

$\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = -4i - 5j + 9k$

$BC = OC - OB = -6i - 2j + 3k$

$CD = OD - OC = -2i + 3j - 6k$

$DA = OA - OD = 6i + 2j - 3k$

$|\overline{AB}| = \sqrt{4+9+36} = 7$

$|\overline{BC}| = \sqrt{36+4+9} = 7$

$|\overline{CD}| = \sqrt{4+9+36} = 7$

$|\overline{DA}| = \sqrt{36+4+9} = 7$

$|\overline{BD}| = \sqrt{64+1+9} = \sqrt{74}$

$|\overline{AC}| = \sqrt{16+25+81} = \sqrt{122}$

i.e, $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{CD}| = |\overline{DA}| \,\&\, |\overline{BD}| \neq |\overline{AC}|$

$\therefore$ ABCD అనేది సమ చతురస్రం

16. $\bar{a} = 2i - 3j + 5k$, $\bar{b} = -i + 4j + 2k$ **అయితే** $\bar{a} \times \bar{b}$**ను కనుక్కోండి.** $\bar{a}, \bar{b}$**లు రెండింటికీ లంబంగా ఉండే యూనిట్ సదిశను కనుక్కోండి. (4M)**

Sol: $\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

$= i\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$

$= i(-6 - 20) - j(4 + 5) + k(8 - 3)$

$= -26i - 9j + 5k$

$\bar{a}, \bar{b}$ లు రెండింటికీ లంబంగా ఉండే యూనిట్ సదిశ

$$= \pm \frac{\bar{a} \times \bar{b}}{|\bar{a} \times \bar{b}|}$$

$$= \pm \frac{(-26i - 9j + 5k)}{\sqrt{(-26)^2 + (-9)^2 + 5^2}} = \pm \frac{(-26i - 9j + 5k)}{\sqrt{782}}$$

17. **a = 2i – 3j + 5k, b = –i + 4j + 2k అయితే (a + b) × ($\bar{a} - \bar{b}$) ని $\bar{a} + \bar{b}$, $\bar{a} - \bar{b}$ సదిశలు రెండింటికీ లంబంగా ఉండే యూనిట్ సదిశను కనుక్కోండి. (4M)**

$\bar{a} + \bar{b} = i + j + 7k;$ $\bar{a} - \bar{b} = 3i - 7j + 3k$

$$(\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 7 \\ 3 & -7 & 3 \end{vmatrix}$$

$= i(3 + 49) - j(3 - 21) + k(-7 - 3)$

$= 52i + 18j - 10k$

$|(\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b})| = \sqrt{(52)^2 + (18)^2 + (-10)^2} = \sqrt{4[(26)^2 + (9)^2 + 5^2]} = 2\sqrt{782}$

$\bar{a} + \bar{b}$, $\bar{a} - \bar{b}$ లు రెండింటికీ లంబంగా ఉండే యూనిట్ సదిశ

$$= \pm \frac{(\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b})}{|(\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b})|}$$

$$= \pm \frac{(52i + 18j - 10k)}{2\sqrt{782}}$$

$$= \pm \frac{(26i + 9j - 5k)}{\sqrt{782}}$$

18. **$\bar{a} = 2i - 3j$, $\bar{b} = 3i - k$ సదిశలు ఆసన్న భుజాలుగా గల సమాంతర చతుర్భుజం వైశాల్యం కనుక్కోండి. (2M)**

Sol: $\bar{a} = 2i - 3j$, $\bar{b} = 3i - k$

సమాంతర చతుర్భుజం సదిశా వైశాల్యం = $\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$= i(3 - 0) - j(-2 - 0) + k(0 + 9)$

$= 3i + 2j + 9k$

వైశాల్యం $= |\bar{a} \times \bar{b}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 9^2}$

$= \sqrt{9 + 4 + 81} = \sqrt{94}$

19. $\bar{a}$ **= i + 2j + 3k,** $\bar{b}$ **= 3i + 5j – k సదిశలు త్రిభుజం రెండు భుజాలు అయితే ఆ త్రిభుజ వైశాల్యం కనుక్కోండి. (4M)**

Sol: త్రిభుజ వైశాల్యం = $\frac{1}{2}\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$= i(-2 - 15) - j(-1 - 9) + k(5 - 6)$

$= -17i + 10j - k$

$\left|\bar{a}\times\bar{b}\right| = \sqrt{(-17)^2 + (10^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{289+100+1}$

$= \sqrt{390}$

$\therefore$ త్రిభుజ వైశాల్యం = $\frac{1}{2}\left|\bar{a}\times\bar{b}\right| = \frac{1}{2}\left|\sqrt{390}\right|$

$= \frac{\sqrt{390}}{2}$

20. **a = 2i – j + k, b = 3i + 4j – k సదిశల మధ్యకోణం θ అయితే Sinθ విలువను కనుక్కోండి. (4M)**

Sol: $\text{Sin}\theta = \frac{\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|}{\left|\bar{a}\right|\ \left|\bar{b}\right|}$

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$= i(1- 4) - j(-2 - 3) + k(8 + 3)$

$= -3i + 5j + 11k$

$\left|\bar{a}\ \times\ \bar{b}\right| = \sqrt{(-3)^2+5^2+11^2} = \sqrt{9+15+121} = \sqrt{155}$

$\left|\bar{a}\right| = \sqrt{2^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

$\left|\bar{b}\right| = \sqrt{3^2+4^2+(-1)^2} = \sqrt{9+16+1} = \sqrt{26}$

$\therefore \text{Sin}\theta = \frac{\sqrt{155}}{\sqrt{6}.\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{155}}{\sqrt{156}}$

21. **a = 2i + j – 2k, b = i + j అనుకొనుము. a.c =** $|\bar{c}|$ **,** $|\bar{c}-\bar{a}| = 2\sqrt{2}$**,** $\bar{a}\times\bar{b}$ **మరియు c ల మధ్య కోణం 30^0 అయ్యేటట్లు సదిశ** $\bar{c}$ **ఉంటే,** $\left|\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right|$ **విలువను కనుక్కోండి.**

Sol: $|\bar{a}| = \sqrt{2^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{4+1+4} = 3$

$|\bar{b}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$|\bar{c}-\bar{a}| = 2\sqrt{2}$

$|\bar{c}-\bar{a}|^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$

$|\bar{c}|^2 + |\bar{a}|^2 - 2(\bar{c}\,.\,\bar{a}) = 8$

$|\bar{c}|^2 + 9 - 2|\bar{c}| = 8$

$|\bar{c}|^2 - 2|\bar{c}| + 1 = 0$

$\left(|\bar{c}|-1\right)^2 = 0$

$|\bar{c}| = 1$

$\left|\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right| = |\bar{a}\times\bar{b}||\bar{c}|.\text{Sin}30^0$

$|\bar{a}\times\bar{b}|(1)\frac{1}{2}$

$\left|\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right| = \frac{1}{2}|\bar{a}\times\bar{b}|$ ....(1)

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

= i(0 + 2) – j(0 + 2) + k(2 – 1)

= 2i – 2j + k

$|\bar{a}\times\bar{b}| = \sqrt{4+4+1} = 3$

(1) $\Rightarrow \left|\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right| = \frac{1}{2}(3) = \frac{3}{2}$

22. $\bar{a}$ **= 4i + 5j – k,** $\bar{b}$ **= i – 4j + 5k,** $\bar{c}$ **= 3i + j – k అనుకొనుము.** $\bar{a}$, $\bar{b}$ **లు రెండింటికీ లంబంగా ఉంటూ** α. **c** = 21 **అయ్యేలా ఉండే** α **ను కనుక్కోండి.** (4M)

Sol: $\overline{\alpha} = \lambda(\overline{a}\times\overline{b})$ అయ్యేటట్లు λ వ్యవస్థితం అవుతుంది.

$$\overline{a}\times\overline{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 5 & -1 \\ 1 & -4 & 5 \end{vmatrix}$$

$= i(25-4) - j(20+1) + k(-16-5)$

$= 21i - 21j - 21k$

$\therefore\ \overline{\alpha} = \lambda(21i - 21j - 21k)$

$\overline{\alpha} = 21\lambda(i - j - k)$

కాని $\overline{\alpha}\,.\,\overline{c} = 21$

$21\lambda\ (i-j-k)\,.\,(3i+j-k) = 21$

$21\lambda\ (3-1+1) = 21$

$21 \times 3 \times \lambda = 21$

$\lambda = \dfrac{1}{3}$

$\therefore\ \alpha = 21\left(\dfrac{1}{3}\right)(i-j-k)$

$\alpha = 7(i-j-k) = 7i - 7j - 7k$

23. ఏదైనా ఒక సదిశ $\overline{a}$ కి $|\overline{a}\times i|^2 + |\overline{a}\times j|^2 + |\overline{a}\times k|^2 = 2\left|\overline{a}\right|^2$ అని చూపండి. (4M)

Sol: $\overline{a} = xi + yj + zk$ అయితే $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\overline{a}\times i = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$= i(0-0) - j(0-z) + k(0-y)$

$= zj - yk$

$\left|\overline{a}\times i\right| = \sqrt{z^2+y^2}$

ఇదేవిధంగా $\left|\overline{a}\times j\right| = \sqrt{z^2+x^2}$

$\left|\overline{a}\times k\right| = \sqrt{x^2+y^2}$

$\therefore\ \left|\overline{a}\times i\right|^2 + \left|\overline{a}\times j\right|^2 + \left|\overline{a}\times k\right|^2$

$= z^2 + y^2 + z^2 + x^2 + x^2 + y^2 = 2(x^2+y^2+z^2)$

$= 2.\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2 \quad = 2|\,a\,|^2$

24. $\bar{a} = 2i - j + k$, $\bar{b} = i - 3j - 5k$ **అయితే** $|\bar{a} \times \bar{b}|$ **ని కనుక్కోండి.** (2M)

Sol: $\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix}$

$= i(5 + 3) - j(-10 - 1) + k(-6 + 1)$

$= 8i + 11j - 5k$

$\therefore |\bar{a} \times \bar{b}| = \sqrt{8^2 + 11^2 + (-5)^2}$

$= \sqrt{64 + 121 + 25}$

$= \sqrt{210}$

25. $\bar{a} = 2i - 3j + k$, $\bar{b} = i + 4j - 2k$ **అయితే** $(\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b})$ **ని కనుక్కోండి.** (2M)

Sol: $\bar{a} + \bar{b} = 3i + j - k$

$\bar{a} - \bar{b} = i - 7j + 3k$

$(\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -7 & 3 \end{vmatrix}$

$= i(3 - 7) - j(9 + 1) + k(-21 - 1)$

$= -4i - 10j - 22k$

26. $4i + \frac{2p}{3}j + pk$**, సదిశ** $i + 2j + 3k$ **కు సమాంతరం అయితే, p విలువను కనుక్కోండి.** (2M)

Sol: $\bar{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$, $\bar{b} = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ కు సమాంతరం అయితే

$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

$\therefore \frac{4}{1} = \frac{2p/3}{2} = \frac{p}{3}$

$4 = \frac{p}{3}$

$\Rightarrow p = 12$

27. $i + j + k$, $2i + j + 3k$ **సదిశలు రెండింటికీ లంబంగా ఉండే యూనిట్ సదిశను కనుక్కోండి.** (2M)

Sol: $\bar{a}, \bar{b}$ లకు లంబంగా ఉండే యూనిట్ సదిశ $= \pm\frac{(\bar{a} \times \bar{b})}{|\bar{a} \times \bar{b}|}$

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$= i(3 - 1) - j(3 - 2) + k(1 - 2)$

$= 2i - j - k$

$\therefore\ |\bar{a} \times \bar{b}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

$\therefore$ కావలసిన యూనిట్ సదిశ $= \pm\dfrac{(2i - j - k)}{\sqrt{6}}$

28. $\bar{a}$ **= 2j – k,** $\bar{b}$ **= –i + k లు ఆసన్న భుజాలుగా గల సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.** (2M)

Sol: సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం = $|\bar{a} \times \bar{b}|$

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$= i(2 - 0) - j(0 - 1) + k(0 + 2)$

$= 2i + j + 2k$

$\therefore$ సమాంతర చతుర్భుజ = $|\bar{a} \times \bar{b}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}$

$= \sqrt{4+1+4} = 3$

29. A(1, 2, 3), B(2, 3, 1), C(3, 1, 2) **లను శీర్షాలుగా కలిగిన త్రిభుజ వైశాల్యం కనుక్కోండి.** (4M)

Sol: $\overline{OA} = i + 2j + 3k$

$\overline{OB} = 2i + 3j + k$

$\overline{OC} = 3i + j + 2k$

$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = i + j - 2k$

$\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = 2i - j - k$

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$= i(-1 -2) - j(-1 + 4) + k(-1 - 2)$

$= -3i - 3j - 3k$

$$\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right| = \sqrt{9+9+9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

త్రిభుజ వైశాల్యం $= \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$

$$= \frac{1}{2}\left(3\sqrt{3}\right)$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

30. $\bar{a}$ **= 2i + j – k,** $\bar{b}$ **= – i + 2j – 4k,** $\bar{c}$ **= i + j + k అయితే** $(\bar{a}\times\bar{b}).(\bar{b}\times\bar{c})$ **కనుక్కోండి.** (4M)

Sol: $\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$

$= i(-4 + 2) - j(-8 - 1) + k(4 + 1)$

$= -2i + 9j + 5k$

$\bar{b}\times\bar{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= i(2 + 4) - j(-1 + 4) + k(-1 - 2)$

$= 6i - 3j - 3k$

$(\bar{a}\times\bar{b}).(\bar{b}\times\bar{c}) = (-2i + 9j + 5k) . (6i - 3j - 3k)$

$= (-2)(6) + (9)(-3) + (5)(-3)$

$= -12 - 27 - 15$

$= -54$

31. P(1, –1, 2), Q(2, 0, –1), R(0, 2, 1) బిందువులతో నిర్ణయమయ్యే తలానికి లంబంగా ఉండే యూనిట్ సదిశను కనుక్కోండి. (4M)

Sol: OP = i – j + 2k; OQ = 2i – k; OR = 2j + k

PQ = OQ – OP = i + j – 3k

PR = OR – OP = –i + 3j – k

$PQ \times PR = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

$= i(-1 + 9) - j(-1 - 3) + k(3 + 1)$

34. $\bar{a} = 7i - 2j + 3k,\ \bar{b} = 2i + 8k,\ \bar{c} = i + j + k$ **అయితే** $\bar{a} \times \bar{b},\ \bar{a} \times \bar{c},\ \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$**లను గణించండి. సదిశాలబ్ధం, సదిశా సంకలనంపై విభజితం అవుతుందేమో సరిచూడండి.** (7M)

Sol: $\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 7 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 8 \end{vmatrix}$

$= i(-16 - 0) - j(56 - 6) + k(0 + 4)$

$= -16i - 50j + 4k$

$\bar{a} \times \bar{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 7 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= i(-2 - 3) - j(7 - 3) + k(7 + 2)$

$= -5i - 4j + 9k$

$\bar{b} + \bar{c} = 2i + 8k + i + j + k$

$= 3i + j + 9k$

$\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 7 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 9 \end{vmatrix}$

$= i(-18 - 3) - j(63 - 9) + k(7 + 6)$

$= -21i - 54j + 13k$ ....(1)

$\bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c} = -16i - 50j + 4k + (-5i - 4j + 9k)$

$= -21i - 54j + 13k$ ....(2)

(1), (2) ల నుండి

$\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}) + (\bar{a} \times \bar{c})$

$\therefore$ సదిశా లబ్ధం, సదిశా సంకలనంపై విభాగన్యాయాన్ని పాటిస్తుంది.

35. $\bar{a} = i + j + k,\ \bar{c} = j - k$ **అయితే** $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{c}$ **మరియు** $\bar{a}.\bar{b} = 3$ **లను తృప్తిపరిచే** $\bar{b}$ **ను కనుగొనండి.** (7M)

Sol: $\bar{b} = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ అనుకొనుము.

$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{c}$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = j - k$

$i(b_3 - b_2) - j(b_3 - b_1) + k(b_2 - b_1) = j - k$

$\Rightarrow \quad b_3 - b_2 = 0; b_1 - b_3 = 1; b_2 - b_1 = -1$

$b_3 = b_2 = k$ (అనుకొనుము)

$b_1 - k = 1 \qquad k - b_1 = -1$

$b_1 = 1 + k; \qquad b_1 = k + 1$

దత్తాంశం నుండి $\bar{a} \cdot \bar{b} = 3$

$(i + j + k). (b_1 i + b_2 j + b_3 k) = 3$

$b_1 + b_2 + b_3 = 3$

$k + 1 + k + k = 3$

$3k = 2$

$k = \frac{2}{3}$

$\therefore \overline{b_1} = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}, \quad b_2 = b_3 = k = \frac{2}{3}$

$\therefore \bar{b} = b_1 i + b_2 j + b_3 k$

$= \frac{5}{3} i + \frac{2}{3} j + \frac{2}{3} k = \frac{1}{3}(5i + 2j + 2k)$

36. యూనిట్ సదిశలు $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$లతో $\bar{a}$ సదిశ $\bar{b}, \bar{c}$ లు రెండింటికీ లంబంగా ఉండి, $\bar{b}, \bar{c}$ల మధ్యకోణం $\frac{\pi}{3}$ అయితే $|\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}|$ విలువను కనుక్కోండి. (7M)

Sol: $|\bar{a}| = |\bar{b}| = |\bar{c}| = 1$

$\bar{a} \perp \bar{b} \quad \Rightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0$

$\bar{a} \perp \bar{c} \quad \Rightarrow \bar{a} \cdot \bar{c} = 0$

$|\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}|^2 = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 + |\bar{c}|^2 + 2\left(\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{c} \cdot \bar{a}\right)$

$= 1 + 1 + 1 + 2\left(0 + |b||c| \operatorname{Cos}\frac{\pi}{3} + 0\right)$

$= 1 + 1 + 1 + 2\left(1.1.\frac{1}{2}\right)$

$= 1 + 1 + 1 + 1$

$|\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}|^2 = 4$

$\therefore |\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}| = 2$

$= 8i + 4j + 4k$

$= 4(2i + j + k)$

$|PQ \times PR| = 4\sqrt{4+1+1} = 4\sqrt{6}$

కావలసిన యూనిట్ సదిశ $= \pm\dfrac{(PQ \times PR)}{|PQ \times PR|}$

$= \pm\dfrac{4(2i + j + k)}{4\sqrt{6}}$

$= \pm\dfrac{(2i + j + k)}{\sqrt{6}}$

32. $|\bar{a}| = 13$, $|\bar{b}| = 5$, $\bar{a}.\bar{b} = 60$ **అయితే** $|\bar{a} \times \bar{b}|$**ని కనుక్కోండి.** (2M)

Sol: $|\bar{a} \times \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 \, |\bar{b}|^2 - (\bar{a}.\bar{b})^2$

$= (13)^2(5)^2 - (60)^2$

$= 4225 - 3600 = 625$

$\Rightarrow |\bar{a} \times \bar{b}| = 25$

33. $\bar{a}$ **= 2i + 3j + 4k,** $\bar{b}$ **= i + j – k,** $\bar{c}$ **= i – j + k అయితే** $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$**ని గణన చేయండి. ఈ సదిశ** $\bar{a}$ **కు లంబంగా ఉంటుందని సరిచూడండి.** (4M)

Sol: $\bar{b} \times \bar{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$= i(1 - 1) - j(1 + 1) + k(-1 - 1)$

$= -2j - 2k$

$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}$

$= i(-6 + 8) - j(-4 - 0) + k(-4 - 0)$

$= 2i + 4j - 4k$

$(\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})).\bar{a} = (2i + 4j - 4k).(2i + 3j + 4k)$

$= 2(2) + 4(3) + (-4)(4)$

$= 4 + 12 - 16$

$= 0$

కావున $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$ సదిశ $\bar{a}$ కు లంబంగా ఉంటుంది.

37. $\bar{a} = 3i - j + 2k$, $\bar{b} = -i + 3j + 2k$, $\bar{c} = 4i + 5j - 2k$, $\bar{d} = i + 3j + 5k$, **అయితే** (i) $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)$ (ii) $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}$ - $\left(\bar{a}\times\bar{d}\right).\bar{b}$ **లను గణించండి. (7M)**

Sol: $\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$= i(-2 - 6) - j(6 + 2) + k(9 - 1)$

$= -8i - 8j + 8k$

$\bar{c}\times\bar{d} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

$= i(25 + 6) - j(20 + 2) + k(12 - 5)$

$= 31i - 22j + 7k$

(i) $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -8 & -8 & 8 \\ 31 & -22 & 7 \end{vmatrix}$

$= i(-56 + 176) - j(-56 - 248) + k(176 + 248)$

$= 120i + 304j + 424k$

$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c} = (-8i - 8j + 8k).(4i + 5j - 2k)$

$= (-8)(4) + (-8)(5) + (8)(-2)$

$= -32 - 40 - 16$

$= -88$

$\left(\bar{a}\times\bar{d}\right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

$= i(-5 - 6) - j(15 - 2) + k(9 + 1)$

$= -11i - 13j + 10k$

$\left(\bar{a}\times\bar{d}\right)\cdot\bar{b} = (-11i - 13j + 10k). (-i + 3j + 2k)$

$= (-11)(-1) + (-13)(3) + 10(2)$

$= 11 - 39 + 20$

$= -8$

$\therefore$ $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}$ - $\left(\bar{a}\times\bar{d}\right).\bar{b} = -88 - (-8)$

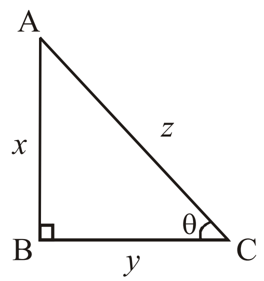
$= -88 + 8 = -80$

❖❖❖❖❖

యూనిట్ **6**

త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు, పరివర్తనలు

1. **ఒక లంబకోణ త్రిభుజం ABCలో 'θ' ఒక లఘుకోణము 'θ'కు ఎదుటిభుజం x, ఆసన్నభుజం y, కర్ణము z అయితే**



$\text{Sin}\theta = \frac{x}{z}$

$\text{Cos}\theta = \frac{y}{z}$

$\tan\theta = \frac{x}{y}$

$\text{Cosec}\theta = \frac{z}{x}$

$\text{Sec}\theta = \frac{z}{y}$

$\text{Cot}\theta = \frac{y}{x}$

– **త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల నిర్వచనాల నుండి కింది విషయాలు గమనించవచ్చు.**

1) $\tan\theta = \frac{\text{Sin}\theta}{\text{Cos}\theta}$ 2) $\text{Cot}\theta = \frac{\text{Cos}\theta}{\text{Sin}\theta}$, 3) $\text{Sec}\theta = \frac{1}{\text{Cos}\theta}$ 4) $\text{Cos}\theta = \frac{1}{\text{Sec}\theta}$

5) $\text{Sin}\theta = \frac{1}{\text{Cosec}\theta}$ 6) $\text{Cosec}\theta = \frac{1}{\text{Sin}\theta}$

– పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుంచి, θ ఏదైనా కోణమైతే,

1) $\text{Cos}^2\theta + \text{Sin}^2\theta = 1$

$\text{Cos}^2\theta = 1 - \text{Sin}^2\theta$

$\text{Sin}^2\theta = 1 - \text{Cos}^2\theta$

2) $\text{Sec}^2\theta - \tan^2\theta = 1$

$\text{Sec}^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

$\tan^2\theta = \text{Sec}^2\theta - 1$

3) $\text{Cosec}^2\theta - \text{Cot}^2\theta = 1$

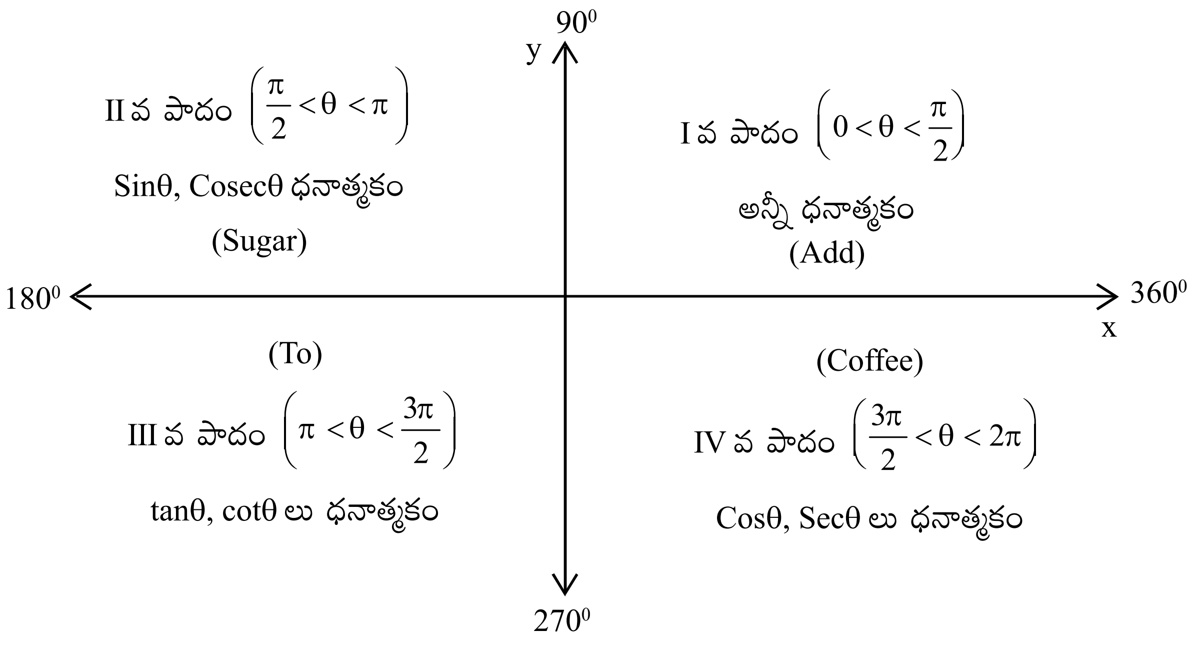
$\text{Cosec}^2\theta = 1 + \text{Cot}^2\theta$

$\text{Cot}^2\theta = \text{Cosec}^2\theta - 1$

- వివిధ కోణాలకు త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల విలువలు కింది పట్టికలో పొందుపరిచాము.

కోణం (θ) త్రికోణమితీయ నిష్పత్తి	0^0	$\frac{\pi}{6} = 30^0$	$\frac{\pi}{4} = 45^0$	$\frac{\pi}{3} = 60^0$	$\frac{\pi}{2} = 90^0$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cot\theta$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\text{cosec}\theta$	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞

- త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను నాలుగు పాదాల ద్వారా వాటి గుర్తులను గుర్తుంచుకోవడానికి కింది పటం ద్వారా తెలుసుకుందాం.



Add	Sugar	To	Coffee
అన్ని త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు ధనాత్మకం	$\left.\begin{array}{l}\text{Sin}\\ \text{Cosec}\end{array}\right\} +ve$	$\left.\begin{array}{l}\tan\\ \text{Cot}\end{array}\right\} +ve$	$\left.\begin{array}{l}\text{Cos}\\ \text{Sec}\end{array}\right\} +ve$
	$\left.\begin{array}{l}\text{Cos}\\ \tan\\ \text{Cot}\\ \text{Sec}\end{array}\right\} -ve$	$\left.\begin{array}{l}\text{Sin}\\ \text{Cos}\\ \text{Sec}\\ \text{Cosec}\end{array}\right\} -ve$	$\left.\begin{array}{l}\text{Sin}\\ \text{Cosec}\\ \tan\\ \text{Cot}\end{array}\right\} -ve$

కోణం (α)	Sinα	Cosα	tanα
$n\pi - \theta$	$(-1)^{n+1}\text{Sin}\theta$	$(-1)^n\text{Cos}\theta$	$-\tan\theta$
$n\pi + \theta$	$(-1)^n\text{Sin}\theta$	$(-1)^n\text{Cos}\theta$	$\tan\theta$
$(2n+1)\frac{\pi}{2} - \theta$	$(-1)^n\text{Cos}\theta$	$(-1)^n\text{Sin}\theta$	Cotθ
$(2n+1)\frac{\pi}{2} + \theta$	$(-1)^n\text{Cos}\theta$	$(-1)^{n+1}\text{Sin}\theta$	$-$Cotθ

– ఏదైనా త్రికోణమితీయ నిష్పత్తిని $\frac{n\pi}{2} \pm \theta$ ($n \in Z$) కు అనువర్తించినపుడు

(i) 'n' సరి పూర్ణాంకం అయితే, ఆ త్రికోణమితీయ నిష్పత్తి మారదు.

(ii) 'n' బేసి పూర్ణాంకం అయితే, ఆ త్రికోణమితీయ నిష్పత్తి మారుతుంది. ఆ మార్పు కింద సూచించాం.

Sin $\rightleftharpoons$ Cos tan $\rightleftharpoons$ Cot Sec $\rightleftharpoons$ Cosec

(iii) $\frac{n\pi}{2} \pm \theta$ అనేది ఏ పాదంలోని కోణం అవుతుందో గమనించి, దానిపై తీసుకున్న త్రికోణమితీయ నిష్పత్తి గుర్తును + లేదా – గా నిర్ణయిస్తాం.

- $\text{Sin}(-\theta) = -\text{Sin}\theta$, $\text{Cos}(-\theta) = \text{Cos}\theta$; $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

  $\text{Cot}(-\theta) = -\text{Cot}\theta$, $\text{Sec}(-\theta) = \text{Sec}\theta$; $\text{Cosec}(-\theta) = -\text{Cosec}\theta$

- అన్ని త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు ఆవర్తన ప్రమేయాలు.

  Sinx కి నిర్దిష్ట ఆవర్తనము 2π

  Cosx కి నిర్దిష్ట ఆవర్తనము 2π

  tanx కి నిర్దిష్ట ఆవర్తనము π

- Sinθ (లేదా) Cosθ కి వ్యాప్తి $[-1, 1]$

  tanθ (లేదా) Cotθ కి వ్యాప్తి R

  Secθ (లేదా) Cosecθ కి వ్యాప్తి $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

సంయుక్త కోణములు

* **A, B లు ఏవైనా రెండు కోణాలయితే**

i) $\sin(A + B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

ii) $\sin(A - B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$

iii) $\cos(A + B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

iv) $\cos(A - B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

* $(A + B), A - B, A, B$ లు ఏవీ $\frac{\pi}{2}$ బేసి గుణిజాలు కాకపోతే,

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$$

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$$

* $A, B, A + B, A - B$ లు ఏవీ π పూర్ణాంక గుణిజాలు కాకపోతే

$$\cot(A + B) = \frac{\cot A\cot B - 1}{\cot B + \cot A}$$

$$\cot(A - B) = \frac{\cot A\cot B + 1}{\cot B - \cot A}$$

* $A, B, C \in R$ అయితే

$$\sin(A+B+C) = \sum(\sin A\cos B\cos C) - \sin A\sin B\sin C$$

$$\cos(A + B + C) = \cos A\cos B\cos C - \sum(\cos A\sin B\sin C)$$

* **గుణిజ, ఉపగుణిజ కోణాల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు:**

1. $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, \quad \sin\theta = 2\sin\theta/2\cos\theta/2$

$= \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} \qquad = \frac{2\tan\theta/2}{1+\tan^2\theta/2}$

2. $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \qquad \cos\theta = \cos^2\theta/2 - \sin^2\theta/2$

$= 1 - 2\sin^2\theta \qquad = 1 - 2\sin^2\theta/2$

$= 2\cos^2\theta - 1 \qquad = 2\cos^2\theta/2 - 1$

3. $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \qquad \tan\theta = \frac{2\tan\theta/2}{1-\tan^2\theta/2}$

4. $\cot 2\theta = \frac{\cot^2\theta - 1}{2\cot\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cot^2\theta/2 - 1}{2\cot\theta/2}$

5. $1 + \text{Cos}2\theta = 2\text{Cos}^2\theta$ $\qquad 1 + \text{Cos}\theta = 2\text{Cos}^2\,\theta/2$

6. $1 - \text{Cos}2\theta = 2\text{Sin}^2\theta$ $\qquad 1 - \text{Cos}\theta = 2\,\text{Sin}^2\theta/2$

7. $\text{Sin}\theta = \pm\sqrt{\dfrac{1-Cos2\theta}{2}}$ $\qquad \text{Sin}\theta/2 = \pm\sqrt{\dfrac{1-Cos\theta}{2}}$

8. $\text{Cos}\theta = \pm\sqrt{\dfrac{1+Cos2\theta}{2}}$ $\qquad \text{Cos}\theta/2 = \pm\sqrt{\dfrac{1+Cos\theta}{2}}$

9. $\tan\theta = \pm\sqrt{\dfrac{1-Cos2\theta}{1+Cos2\theta}}$ $\qquad \tan\theta/2 = \pm\sqrt{\dfrac{1-Cos\theta}{1+Cos\theta}}$

* $\text{Sin}3\theta = 3\text{Sin}\theta - 4\text{Sin}^3\theta$

$\text{Cos}3\theta = 4\text{Cos}^3\theta - 3\text{Cos}\theta$

$$\tan3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$$

$$\text{Cot}3\theta = \frac{3Cot\theta - Cot^3\theta}{1-3Cot^2\theta}$$

పరివర్తనలు

* $\text{Sin}(A + B) + \text{Sin}(A - B) = 2\text{SinACosB}$

* $\text{Sin}(A + B) - \text{Sin}(A - B) = 2\text{CosASinB}$

* $\text{Cos}(A + B) + \text{Cos}(A - B) = 2\text{CosACosB}$

* $\text{Cos}(A - B) - \text{Cos}(A + B) = 2\text{SinASinB}$

త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల మొత్తాన్ని లేదా భేదాన్ని లబ్ధంగా మార్చడం

* $\text{SinC} + \text{SinD} = 2\text{Sin}\left(\dfrac{C+D}{2}\right)\text{Cos}\left(\dfrac{C-D}{2}\right)$

* $\text{SinC} - \text{SinD} = 2\text{Cos}\left(\dfrac{C+D}{2}\right)\text{Sin}\left(\dfrac{C-D}{2}\right)$

* $\text{CosC} + \text{CosD} = 2\text{Cos}\left(\dfrac{C+D}{2}\right)\text{Cos}\left(\dfrac{C-D}{2}\right)$

* $\text{CosC} - \text{CosD} = -2\text{Sin}\left(\dfrac{C+D}{2}\right)\text{Sin}\left(\dfrac{C-D}{2}\right)$

కొన్ని ముఖ్యమైన సమస్యలు - సాధనలు

1. క్రింది వాటిని సూక్ష్మీకరించండి.

i. $\text{Cos}315^0 = \text{Cos}(360^0 - 45^0) = \text{Cos}45^0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

ii. $\text{Cot}(-300^0) = -\text{Cot}300^0 = -\text{Cot}(360 - 60^0) = -\text{Cot}(-60^0) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

iii. $\text{Sin}\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) = \text{Sin}\left(2\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\text{Sin}\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\text{Cos}^2 45^0 + \text{Cos}^2 135^0 + \text{Cos}^2 225^0 + \text{Cos}^2 315^0$ విలువను గణించండి.

Sol: $\text{Cos}^2 45^0 + \text{Cos}^2 135^0 + \text{Cos}^2 225^0 + \text{Cos}^2 315^0$

$= \text{Cos}^2 45^0 + \text{Cos}^2(180-45^0) + \text{Cos}^2(180+45^0) + \text{Cos}^2(360-45^0)$

$= \text{Cos}^2 45^0 + \text{Cos}^2 45^0 + \text{Cos}^2 45^0 + \text{Cos}^2 45^0$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

3. $\text{Cot}\dfrac{\pi}{20}.\text{Cot}\dfrac{3\pi}{20}.\text{Cot}\dfrac{5\pi}{20}.\text{Cot}\dfrac{7\pi}{20}.\text{Cot}\dfrac{9\pi}{20}$ విలువను కనుక్కోండి.

Sol: $\text{Cot}\dfrac{\pi}{20}.\text{Cot}\dfrac{3\pi}{20}.\text{Cot}\dfrac{5\pi}{20}.\text{Cot}\dfrac{7\pi}{20}.\text{Cot}\dfrac{9\pi}{20} = \text{Cot}9^0.\text{Cot}27^0.\text{Cot}45^0.\text{Cot}63^0.\text{Cot}81^0$

$\text{Cot}9^0.\text{Cot}27^0.\text{Cot}(90^0 - 27).\text{Cot}(90^0 - 9^0)$

$= \text{Cot}9^0.\text{Cot}27^0.\tan 27^0.\tan 9^0 = 1$

4. $\text{Sin}330^0.\text{Cos}120^0 + \text{Cos}210^0.\text{Sin}300^0$ విలువను కనుక్కోండి.

Sol: $\text{Sin}330^0.\text{Cos}120^0 + \text{Cos}210^0.\text{Sin}300^0$

$= \text{Sin}(360 - 30^0)\,\text{Cos}(180 - 60^0) + \text{Cos}(180 + 30^0)\,\text{Sin}(360 - 60^0)$

$= (-\text{Sin}30^0)(-\text{Cos}60^0) + (-\text{Cos}30^0)(-\text{Sin}60^0)$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

5. $\text{Sin}\alpha + \text{Cosec}\alpha = 2$, $n \in Z$ అయితే $\text{Sin}^n\alpha + \text{Cosec}^n\alpha$ విలువను కనుక్కోండి.

Sol: $\text{Sin}\alpha + \text{Coses}\alpha = 2$

$$\text{Sin}\,\alpha + \frac{1}{\text{Sin}\alpha} = 2$$

$\Rightarrow$ $\text{Sin}^2\alpha + 1 = 2\text{Sin}\alpha$

$\Rightarrow \quad 1 - 2\,Sin^2\alpha + Sin^2\alpha = 0$

$\Rightarrow \quad (1 - Sin\alpha)^2 = 0$

$\Rightarrow \quad 1 - Sin\alpha = 0$

$\Rightarrow \quad Sin\alpha = 1 \;\Rightarrow\; \alpha = 90^0$

$\therefore\; Sin^n\alpha + Cosec^n\alpha = Sin^n 90^0 + Cosec^n 90^0 = 1^n + 1^n = 1 + 1 = 2$

6. కింది వాటిలో θను లోపింపచేయండి.

(i) $x = a\,Cos^3\theta\,;\; y = bSin^3\theta$

Sol: $\frac{x}{a} = Cos^3\theta \qquad \frac{y}{b} = Sin^3\theta$

$Cos\theta = \left(\frac{x}{a}\right)^{1/3} \qquad Sin\theta = \left(\frac{y}{b}\right)^{1/3}$

$\because\; Cos^2\theta + Sin^2\theta = 1$

$\Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$

ii. $x = a(Sec\theta + tan\theta)$; $y = b(Sec\theta - tan\theta)$

Sol: $xy = ab(Sec^2\theta - tan^2\theta)$

$= ab(1)$

$xy = ab$

7. కింది ప్రమేయాలకు ఆవర్తనాలు కనుక్కోండి.

i) $Cos(3x + 5) + 7$

Sol: $f(x) = Cos(3x + 5) + 7$

ఆవర్తనము $= \frac{p}{|a|} = \frac{2\pi}{3}$

ii) tan5x

Sol: $f(x) = tan5x$

ఆవర్తనము $= \frac{\pi}{5}$

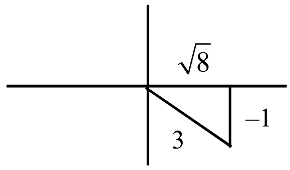
iii) $Cos\left(\frac{4x+9}{5}\right)$

Sol: $f(x) = Cos\left(\frac{4x+9}{5}\right)$

ఆవర్తనము $= \frac{2\pi}{4/5} = \frac{10\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}$

8. **కోణం θ, మూడో పాదంలో లేదు. $Sin\theta = -\frac{1}{3}$ అయితే a) Cosθ b) Cotθ ల విలువలను కనుక్కోండి.**

Sol: $Sin\theta = -\frac{1}{3} < 0$; θ మూడోపాదంలో లేదు.



⇒ θ, నాలుగో పాదంలో ఉంటుంది.

a) $Cos\theta = \frac{\sqrt{8}}{3}$ b) $Cot\theta = -\sqrt{8}$

9. $Sin^2 82\frac{1}{2}^0 - Sin^2 22\frac{1}{2}^0$ **విలువను గణించండి.**

Sol: $Sin^2 82\frac{1}{2}^0 - Sin^2 22\frac{1}{2}^0 = Sin^2A - Sin^2B$

$= Sin(A + B)\ Sin(A - B)$

$= Sin105^0 . Sin60^0$ [$\because$ $A = 82\frac{1}{2}^0$; $B = 22\frac{1}{2}^0$ ను ప్రతిక్షేపించగా]

$= Sin(90 + 15^0)\ Sin60^0$

$= Cos15^0 . Sin60^0$

$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} . \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$

10. **$Cos^2 112\frac{1}{2}^0 - Sin^2 52\frac{1}{2}^0$ విలువను గణించండి.**

Sol: $A = 112\frac{1}{2}^0$; $B = 52\frac{1}{2}^0$ అయిన

$Cos^2 112\frac{1}{2}^0 - Sin^2 52\frac{1}{2}^0 = Cos^2A - Sin^2B$

$= Cos(A + B).Cos(A - B) \Rightarrow Cos(165^0).Cos60^0$

$= Cos(180 - 15^0) . Cos60^0$

$= -Cos15^0.Cos60^0$

$= -\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$

$= -\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4\sqrt{2}}\right)$

11. 3Cosx + 4Sinx ప్రమేయానికి గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు కనుక్కోండి.

Sol: f(x) = 3Cosx + 4Sinx అనుకొనుము.

దీనిని f(x) = a sinx + b cosx + c తో పోల్చగా a = 4, b = 3, c = 0.

f కు కనిష్ట విలువ $= c - \sqrt{a^2+b^2}$

$= 0 - \sqrt{4^2+3^2}$

$= -\sqrt{25}$

$= -5$

f కు గరిష్ట విలువ $= c + \sqrt{a^2+b^2}$

$= 0 + \sqrt{4^2+3^2}$

$= \sqrt{25}$

$= 5$

12. Sin2x – Cos2x ప్రమేయానికి కనిష్ట, గరిష్ట విలువలు కనుక్కోండి.

Sol: f(x) = Sin2x – Cos2x అనుకొనుము

దీనిని f(x) = a sinx + b cosx + c తో పోల్చగా a = 1, b = –1, c = 0.

f కు కనిష్ట విలువ $= c - \sqrt{a^2+b^2}$

$= -\sqrt{1^2+(-1)^2}$

$= -\sqrt{2}$

f కు గరిష్ట విలువ $= c + \sqrt{a^2+b^2}$

$= \sqrt{1^2+(-1)^2}$

$= \sqrt{1+1}$

$= \sqrt{2}$

13. 7Cosx – 24Sinx + 5 ప్రమేయానికి వ్యాప్తి కనుక్కోండి.

Sol: f(x) = 7Cosx – 24Sinx + 5 అనుకొనుము

దీనిని f(x) = a sinx + b cosx + c తో పోల్చగా a = –24, b = 7, c = 5.

f కు కనిష్ట విలువ $= c - \sqrt{a^2+b^2}$

$= 5 - \sqrt{(-24)^2+7^2}$

$= 5-\sqrt{576+49}$

$= 5-\sqrt{625}$

$= 5 - 25$

$= - 20$

f కు గరిష్ఠ విలువ $= c+\sqrt{a^2+b^2}$

$= 5+\sqrt{625}$

$= 5 + 25$

$= 30$

$\therefore$ వ్యాప్తి = [–20, 30]

14. $\tan 20^0 = p$ **అయితే,** $\dfrac{\tan 610^0 + \tan 700^0}{\tan 560^0 - \tan 470^0} = \dfrac{1-p^2}{1+p^2}$ **అని చూపండి.**

Sol: $\dfrac{\tan 610^0 + \tan 700^0}{\tan 560^0 - \tan 470^0} = \dfrac{\tan(360^0+250^0) + \tan(360^0+340^0)}{\tan(360^0+200^0) - \tan(360^0+110^0)}$

$$= \frac{\tan 250^0 + \tan 340^0}{\tan 200^0 - \tan 110^0}$$

$$= \frac{\tan(270^0 - 20^0) + \tan(360^0 - 20^0)}{\tan(180^0+20^0) - \tan(90^0+20^0)}$$

$$= \frac{\cot 20^0 - \tan 20^0}{\tan 20^0 + \text{Cot} 20^0}$$

$$= \frac{\frac{1}{p} - p}{p + \frac{1}{p}} = \frac{1-p^2}{1+p^2} \qquad [\because \tan 20^o = p]$$

15. $\dfrac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$ **అని నిరూపించండి.**

Sol: LHS $= \dfrac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$

$$= \frac{\tan\theta + \sec\theta - (\sec^2\theta - \tan^2\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta)(1 - \sec\theta + \tan\theta)}{(\tan\theta - \sec\theta + 1)}$$

$= \tan\theta + \text{Sec}\theta$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}$$

$$= \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \text{RHS}$$

16. **(1 + Cotθ – Cosecθ) (1 + tanθ + Secθ) = 2 అని నిరూపించండి.**

Sol: LHS = (1 + Cotθ – Cosecθ) (1 + tanθ + Secθ)

$$= \left(1+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\right)\left(1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos\theta}\right)$$

$$= \left(\frac{\sin\theta + \cos\theta - 1}{\sin\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta + \sin\theta + 1}{\cos\theta}\right)$$

$$= \frac{(\sin\theta + \cos\theta)^2 - 1}{\sin\theta \cos\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta - 1}{\sin\theta \cos\theta}$$

$$= \frac{1+ 2\sin\theta\cos\theta - 1}{\sin\theta \cos\theta}$$

$$= \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta \cos\theta}$$

$= 2 = \text{RHS}$

17. **$\tan\theta = \dfrac{\text{Cos}11^0 + \text{Sin}11^0}{\text{Cos}11^0 - \text{Sin}11^0}$, θ మూడవ పాదంలోని కోణం అయితే θ ను కనుక్కోండి.**

Sol: $\tan\theta = \dfrac{\text{Cos}11^0 + \text{Sin}11^0}{\text{Cos}11^0 - \text{Sin}11^0}$

$$= \frac{\text{Cos}11^0\left(1 + \dfrac{\text{Sin}11^0}{\text{Cos}11^0}\right)}{\text{Cos}11^0\left(1 - \dfrac{\text{Sin}11^0}{\text{Cos}11^0}\right)}$$

$$= \frac{1+ \tan11^0}{1-\tan11^0}$$

$= \tan(45^0 + 11^0)$

$\tan\theta = \tan 56^0$

$\tan\theta = \tan(180 + 56^0) = \tan 236^0$

$\Rightarrow \theta = 236^0$

18. $\dfrac{\text{Cos}9^0 + \text{Sin}9^0}{\text{Cos}9^0 - \text{Sin}9^0} = \text{Cot}36^0$ **అని నిరూపించండి.**

Sol: LHS $= \dfrac{\text{Cos}9^0 + \text{Sin}9^0}{\text{Cos}9^0 - \text{Sin}9^0}$

$= \dfrac{1 + \tan 9^0}{1 - \tan 9^0}$ [$\because$ లవ, హారాలను $\cos 9^o$ తో భాగించగా]

$= \tan(45^0 + 9^0)$

$= \tan 54^0$

$= \tan(90 - 36^0)$

$= \text{Cot}36^0 = \text{RHS}$

19. $\mathbf{A + B = \dfrac{\pi}{4}}$ **అయితే $\mathbf{(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2}$ అని నిరూపించండి?**

Sol: $A + B = 45^0$

$\Rightarrow \tan(A + B) = \tan 45^0 = 1$

$\Rightarrow \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = 1$

$\Rightarrow \tan A + \tan B = 1 - \tan A \tan B$

$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan A \tan B = 1$ ....(1)

$\Rightarrow$ ఇపుడు $(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 1 + \tan A + \tan B + \tan A \tan B = 2$ ($\because$ (1) నుండి)

20. $\cos^2\theta + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} + \theta\right) + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} - \theta\right) = \dfrac{3}{2}$ **అని నిరూపించండి.**

Sol: $\cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} + \theta\right) + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} - \theta\right)$

$= \cos^2(120 + \theta) + \cos^2(120 - \theta)$

$= (\cos 120^0 \cos\theta - \sin 120^0 \sin\theta)^2 + (\cos 120^0 \cos\theta + \sin 120^0 \sin\theta)^2$

$= 2[\cos^2 120^0 \cos^2\theta + \sin^2 120^0 \sin^2\theta]$ [$\because (a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$]

$= 2\left[\left(\dfrac{-1}{2}\right)^2 \text{Cos}^2\Theta + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \text{Sin}^2\Theta\right]$

$= 2\left[\dfrac{1}{4}\text{Cos}^2\Theta + \dfrac{3}{4}\text{Sin}^2\Theta\right]$

$$= \frac{2}{4}\left[\mathrm{Cos}^2\Theta + 3\mathrm{Sin}^2\Theta\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\mathrm{Cos}^2\Theta + 3\mathrm{Sin}^2\Theta\right] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$= \mathrm{Cos}^2\Theta + \mathrm{Cos}^2\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right) + \mathrm{Cos}^2\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)$$

$$= \text{LHS} = \mathrm{Cos}^2\theta + \frac{1}{2}\mathrm{Cos}^2\theta + \frac{3}{2}\mathrm{Sin}^2\theta$$ [∵ (1) నుండి]

$$= \frac{3}{2}\mathrm{Cos}^2\theta + \frac{3}{2}\mathrm{Sin}^2\theta$$

$$= \frac{3}{2}(\mathrm{Cos}^2\theta + \mathrm{Sin}^2\theta) = \frac{3}{2} = \text{RHS}$$

21. $\frac{\mathrm{Sin}\alpha}{a} = \frac{\mathrm{Cos}\alpha}{b}$ **అయితే** $\mathbf{aSin2}\alpha + \mathbf{bCos2}\alpha = \mathbf{b}$ **అని నిరూపించండి.**

Sol: $\frac{\mathrm{Sin}\alpha}{a} = \frac{\mathrm{Cos}\alpha}{b} = k$

$\mathrm{Sin}\,\alpha = ak$, $\mathrm{Cos}\,\alpha = bk$

$\text{LHS} = a\mathrm{Sin}2\alpha + b\mathrm{Cos}2\alpha$

$= a(2\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha) + b(1 - 2\mathrm{Sin}^2\alpha)$

$= a[2(ak)(bk)] + b[1 - 2(ak)^2]$

$= 2a^2bk^2 + b - 2a^2bk^2$

$= b = \text{RHS}$

22. $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{sin10^0}} - \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{cos10^0}} = \mathbf{4}$ **అని నిరూపించండి.**

Sol: $\text{LHS} = \frac{1}{\mathrm{Sin}10^0} - \frac{\sqrt{3}}{\mathrm{Cos}10^0}$

$$= \frac{\mathrm{Cos}10^0 - \sqrt{3}\mathrm{Sin}10^0}{\mathrm{Sin}10^0\mathrm{Cos}10^0}$$

$$= \frac{2\left[\frac{1}{2}\mathrm{Cos}10^0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{Sin}10^0\right]}{\frac{1}{2}\left(2\mathrm{Sin}10^0\mathrm{Cos}10^0\right)}$$

$$= \frac{4\left[\text{Sin}30^0\text{Cos}10^0 - \text{Cos}30^0\text{Sin}10^0\right]}{\text{Sin}20^0}$$

$$= \frac{4\text{Sin}(30^0 - 10^0)}{\text{Sin}20^0}$$

$$= \frac{4\text{Sin}20^0}{\text{Sin}20^0}$$

$= 4 = \text{RHS}$

23. ΔABC లో $\tan\frac{A}{2} = \frac{5}{6}$, $\tan\frac{B}{2} = \frac{20}{37}$ **అయితే** $\tan\frac{C}{2} = \frac{2}{5}$ **అని చూపండి.**

Sol: $A + B + C = 180^o \Rightarrow A + B = 180^o - C \Rightarrow \frac{A+B}{2} = 90 - \frac{C}{2}$

$$\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \tan\left(90 - \frac{C}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \text{Cot}\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}}{1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}} = \text{Cot}\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{5}{6} + \frac{20}{37}}{1 - \frac{5}{6}\cdot\frac{20}{37}} = \text{Cot}\frac{C}{2} \qquad \left[\because \tan\frac{A}{2} = \frac{5}{6},\ \tan\frac{B}{2} = \frac{20}{37}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{185+120}{222}}{\frac{222-100}{222}} = \text{Cot}\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{305}{122} = \frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{C}{2} = \frac{122}{305} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{C}{2} = \frac{2}{5}$$

24. $\text{Cos}^2\frac{\pi}{8} + \text{Cos}^2\frac{3\pi}{8} + \text{Cos}^2\frac{5\pi}{8} + \text{Cos}^2\frac{7\pi}{8} = 2$ **అని నిరూపించండి.**

Sol: $\text{LHS} = \text{Cos}^2\frac{\pi}{8} + \text{Cos}^2\frac{3\pi}{8} + \text{Cos}^2\frac{5\pi}{8} + \text{Cos}^2\frac{7\pi}{8}$

$$= \text{Cos}^2\frac{\pi}{8} + \text{Cos}^2\frac{3\pi}{8} + \text{Cos}^2\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) + \text{Cos}^2\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)$$

$$= \text{Cos}^2\frac{\pi}{8} + \text{Cos}^2\frac{3\pi}{8} + \text{Cos}^2\frac{3\pi}{8} + \text{Cos}^2\frac{\pi}{8}$$

$$= 2\left(\text{Cos}^2\frac{\pi}{8} + \text{Cos}^2\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$= 2\left(\text{Cos}^2\frac{\pi}{8} + \text{Cos}^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right)$$

$$= 2\left(\text{Cos}^2\frac{\pi}{8} + \text{Sin}^2\frac{\pi}{8}\right) \qquad = 2(1) = 2 = \text{RHS}$$

25. $\text{Sin}\frac{\pi}{5}.\text{Sin}\frac{2\pi}{5}.\text{Sin}\frac{3\pi}{5}.\text{Sin}\frac{4\pi}{5} = \frac{5}{16}$ **అని చూపండి.**

Sol: $\text{LHS} = \text{Sin}\frac{\pi}{5}.\text{Sin}\frac{2\pi}{5}.\text{Sin}\frac{3\pi}{5}.\text{Sin}\frac{4\pi}{5}$

$= \text{Sin}36^0 . \text{Sin}72^0 . \text{Sin}108^0 . \text{Sin}144^0$

$= \text{Sin}36^0 . \text{Sin}(90–18^0) . \text{Sin}(90+18^0). \text{Sin}(180–36^0)$

$= \text{Sin}36^0 . \text{Cos}18^0 . \text{Cos}18^0. \text{Sin}36^0$

$= \text{Sin}^2 36^0 . \text{Cos}^2 18^0$

$$= \left(\frac{10-2\sqrt{5}}{16}\right).\left(\frac{10+2\sqrt{5}}{16}\right)$$

$$= \frac{100-20}{16\times16} = \frac{80}{16\times16} = \frac{5}{16} = \text{RHS}$$

26. $\left(1 + \text{Cos}\frac{\pi}{10}\right)\left(1 + \text{Cos}\frac{3\pi}{10}\right)\left(1 + \text{Cos}\frac{7\pi}{10}\right)\left(1 + \text{Cos}\frac{9\pi}{10}\right) = \frac{1}{16}$ **అని చూపండి.**

Sol: $\text{LHS} = \left(1 + \text{Cos}\frac{\pi}{10}\right)\left(1 + \text{Cos}\frac{3\pi}{10}\right)\left(1 + \text{Cos}\frac{7\pi}{10}\right)\left(1 + \text{Cos}\frac{9\pi}{10}\right)$

$$= \left(1 + \text{Cos}\frac{\pi}{10}\right)\left(1 + \text{Cos}\frac{3\pi}{10}\right)\left(1 + \text{Cos}\left(\pi - \frac{3\pi}{10}\right)\right)\left(1 + \text{Cos}\left(\pi - \frac{\pi}{10}\right)\right)$$

$$= \left(1 + \text{Cos}\frac{\pi}{10}\right)\left(1 + \text{Cos}\frac{3\pi}{10}\right)\left(1 - \text{Cos}\frac{3\pi}{10}\right)\left(1 - \text{Cos}\frac{\pi}{10}\right)$$

$$= \left(1 - \text{Cos}^2\frac{\pi}{10}\right)\left(1 - \text{Cos}^2\frac{3\pi}{10}\right)$$

$$= \text{Sin}^2\frac{\pi}{10}\text{Sin}^2\frac{3\pi}{10}$$

$$= \text{Sin}^2 18^0 \,.\, \text{Sin}^2 54^0$$

$$= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}{16}\right)^2$$

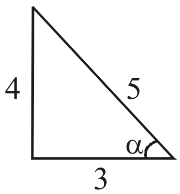
$$= \frac{(5-1)^2}{16\times16} = \frac{16}{16\times16} = \frac{1}{16} = \text{RHS}$$

27. α, β **లు లఘుకోణాలు,** $\text{Cos}\alpha = \frac{3}{5}$, $\text{Cos}\beta = \frac{5}{13}$ **అయితే**

(i) $\text{Sin}^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{1}{65}$, (ii) $\text{Cos}^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{16}{65}$ **అని చూపండి.**

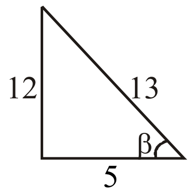
Sol: $\text{Cos}\alpha = \frac{3}{5}$

$\text{Sin}\alpha = \frac{4}{5}$



$\text{Cos}\beta = \frac{5}{13}$

$\text{Sin}\beta = \frac{12}{13}$



(i) $2\text{Sin}^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 1 - \text{Cos}\,(\alpha - \beta)$ $\quad [\because 2\text{Sin}^2\theta = 1 - \text{Cos}2\theta\,]$

$$= 1 - [\text{Cos}\alpha\,\text{Cos}\beta + \text{Sin}\alpha\,\text{Sin}\beta]$$

$$= 1 - \left[\frac{3}{5}.\frac{5}{13} + \frac{4}{5}.\frac{12}{13}\right]$$

$$= 1 - \frac{15}{65} - \frac{48}{65}$$

$$= \frac{65-15-48}{65}$$

$$= \frac{65-63}{65} = \frac{2}{65}$$

$$\therefore \ \text{Sin}^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{1}{65}$$

(ii) $2\text{Cos}^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 1 + \text{Cos}\,(\alpha+\beta)$ $\quad [\because 2\text{Cos}^2\theta = 1 + \text{Cos}2\theta]$

$$= 1 + \text{Cos}\alpha\ \text{Cos}\beta - \text{Sin}\alpha\ \text{Sin}\beta$$

$$= 1 + \left[\frac{3}{5}.\frac{5}{13} - \frac{4}{5}.\frac{12}{13}\right]$$

$$= 1 + \frac{15}{65} - \frac{48}{65}$$

$$= \frac{65+15-48}{65}$$

$$= \frac{80-48}{65}$$

$$\therefore \ 2\text{Cos}^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{32}{65}$$

$$\text{Cos}^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{16}{65}$$

28. A, B, C లు త్రిభుజ కోణాలయితే,

Sin2A + Sin2B + Sin2C = 4 SinASinBSinC **అని చూపండి.**

Sol: LHS = Sin2A + Sin2B + Sin2C

= 2Sin(A + B)Cos(A – B) + Sin2C

= 2SinC Cos(A – B) + 2SinCCosC $\quad [\because A + B + C = 180^o, A + B = 180 - C]$

= 2SinC [Cos(A–B) + CosC]

= 2SinC [Cos(A – B) – Cos (A + B)]

= 2SinC [2SinASinB]

= 4SinASinBSinC

= RHS

29. Cos2A – Cos2B + Cos2C = 1 – 4SinACosBSinC అని చూపండి.

Sol: Cos2A – Cos2B + Cos2C

= –2Sin(A + B)Sin(A – B) + Cos2C

= –2SinCSin(A – B) + 1 – 2Sin^{2}C $\quad [\because A + B + C = 180^o, A + B = 180 - C]$

$= 1 - 2\text{SinC}\,[\text{Sin}(A - B) + \text{SinC}]$

$= 1 - 2\text{SinC}[\text{Sin}(A - B) + \text{Sin}(A + B)]$

$= 1 - 2\text{SinC}[2\text{SinACosB}]$

$= 1 - 4\text{SinACosBSinC}$

30. A, B, C లు త్రిభుజం కోణాలయితే,

$\text{SinA} + \text{SinB} - \text{SinC} = 4\text{Sin}\frac{A}{2} . \text{Sin}\frac{B}{2} . \text{Cos}\frac{C}{2}$ అని నిరూపించండి.

Sol: LHS = SinA + SinB – SinC

$$= 2\text{Sin}\frac{(A+B)}{2}\text{Cos}\frac{A-B}{2} - \text{SinC}$$

$$= 2\text{Cos}\frac{C}{2}\text{Cos}\frac{A-B}{2} - 2\text{Sin}\frac{C}{2}\text{Cos}\frac{C}{2} \qquad \left[\because \text{Sin}\left(\frac{A+B}{2}\right) = \text{Sin}\left(\frac{180 - C}{2}\right) = \text{Sin}\left(90 - \frac{C}{2}\right) = \text{Cos}\frac{C}{2}\right]$$

$$= 2\text{Cos}\frac{C}{2}\left[\text{Cos}\frac{A-B}{2} - \text{Sin}\frac{C}{2}\right]$$

$$= 2\text{Cos}\frac{C}{2}\left[\text{Cos}\frac{A-B}{2} - \text{Cos}\frac{A+B}{2}\right] \qquad \left(\because \text{Sin}\frac{C}{2} = \text{Sin}\left(90 - \frac{A+B}{2}\right)\right) = \text{Cos}\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 2\text{Cos}\frac{C}{2}\left[2\text{Sin}\frac{A}{2} . \text{Sin}\frac{B}{2}\right]$$

$$= 4\text{Sin}\frac{A}{2}\text{Sin}\frac{B}{2}\text{Cos}\frac{C}{2}$$

= RHS

31. $\text{CosA} + \text{CosB} - \text{CosC} = -1 + 4\,\text{Cos}\frac{A}{2}\,\text{Cos}\frac{B}{2}\,\text{Sin}\frac{C}{2}$ అని నిరూపించండి.

Sol: LHS = CosA + CosB – CosC

$$= 2\text{Cos}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{Cos}\left(\frac{A-B}{2}\right) - \text{CosC}$$

$$= 2\text{Sin}\frac{C}{2}\text{Cos}\frac{A-B}{2} - \left(1 - 2\text{Sin}^2\frac{C}{2}\right)$$

$$= 2\text{Sin}\frac{C}{2}\text{Cos}\frac{A-B}{2} - 1 + 2\text{Sin}^2\frac{C}{2}$$

$$= -1 + 2\text{Sin}\frac{C}{2}\left[\text{Cos}\frac{A - B}{2} + \text{Sin}\frac{C}{2}\right]$$

$$= -1 + 2\text{Sin}\frac{C}{2}\left[\text{Cos}\frac{A - B}{2} + \text{Cos}\frac{A + B}{2}\right]$$

$$= -1 + 2\text{Sin}\frac{C}{2}\left[2\text{Cos}\frac{A}{2}.\text{Cos}\frac{B}{2}\right]$$

$$= -1 + 4\text{Cos}\frac{A}{2}\text{Cos}\frac{B}{2}\text{Sin}\frac{C}{2} = \text{RHS}$$

32. A, B, C లు త్రిభుజంలోని కోణాలయితే $Sin^2A + Sin^2B - Sin^2C = 2SinA\ SinB\ CosC$ అని నిరూపించండి.

Sol: LHS $= Sin^2A + Sin^2B - Sin^2C$

$= 1 - Cos^2A + Sin^2B - Sin^2C$

$= 1 - (Cos^2A - Sin^2B) - Sin^2C$

$= 1 - Cos(A + B)\ Cos\ (A - B) - 1 + Cos^2C$

$= CosCCos(A - B) + Cos^2C$

$= CosC\ [CosC + Cos(A - B)]$

$= +CosC\ [Cos(A - B) - Cos(A + B)]$

$= CosC\ [2SinASinB]$

$= 2SinASinBCosC$

$= RHS$

33. A, B, C లు త్రిభుజంలోని కోణాలయితే $Cos^2A + Cos^2B - Cos^2C = 1 - 2SinA\ SinB\ CosC$ అని నిరూపించండి.

Sol: LHS $= Cos^2A + Cos^2B - Cos^2C$

$= Cos^2A + 1 - Sin^2B - Cos^2C$

$= 1 + (Cos^2A - Sin^2B) - Cos^2C$

$= 1 + Cos(A + B)\ Cos\ (A - B) - Cos^2C$

$= 1 - CosC.Cos(A - B) - Cos^2C$

$= 1 - CosC\ [Cos(A - B) + CosC]$

$= 1 - CosC\ [Cos(A - B) - Cos(A + B)]$

$= 1 - CosC\ [2SinASinB]$

$= 1 - 2SinASinBCosC$

$= RHS$

*****

యూనిట్ **9**

అతిపరావలయ ప్రమేయాలు

1. ప్రతీ $x \in R$ కు $\text{Sinh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

2. ప్రతీ $x \in R$ కు $\text{Cosh}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

3. ప్రతీ $x \in R$ కు $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

4. ప్రతీ $x \in R - \{0\}$ కు $\text{Coth}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

5. ప్రతీ $x \in R$ కు $\text{Sech}x = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

6. ప్రతీ $x \in R - \{0\}$ కు $\text{Cosech}x = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

Note:

1) $\text{Cosh}(0) = \dfrac{e^0 + e^{-0}}{2} = \dfrac{1+1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

2) $\text{Sinh}(0) = \dfrac{e^0 - e^{-0}}{2} = \dfrac{1-1}{2} = \dfrac{0}{2} = 0$

3) $\text{Cosh}(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = \text{Cosh}x$

$f(-x) = f(x)$

కావున Coshx సరి ప్రమేయం.

(4) $\text{Sinh}(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \dfrac{e^{-x} - e^x}{2} = -\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = -\text{Sinh}x$

$f(-x) = -f(x)$ కావున Sinh$x$ బేసి ప్రమేయం.

సర్వ సమానతలు

1. ప్రతీ $x \in$ R కు $\text{Cosh}^2x - \text{Sinh}^2x = 1$

2. ప్రతీ $x \in$ R కు $1 - \tanh^2 x = \text{Sech}^2x$

3. ప్రతీ $x \in$ R $- \{0\}$ కు $\text{Coth}^2x - 1 = \text{Cosech}^2x$

సిద్ధాంతం - 1

(i) $\text{Sinh}(x + y) = \text{Sinh}x\,\text{Cosh}y + \text{Cosh}x\,\text{Sinh}y$

(ii) $\text{Sinh}(x - y) = \text{Sinh}x\,\text{Cosh}y - \text{Cosh}x\,\text{Sinh}y$

(iii) $\text{Cosh}(x + y) = \text{Cosh}x\,\text{Cosh}y + \text{Sinh}x\,\text{Sinh}y$

(iii) $\text{Cosh}(x - y) = \text{Cosh}x\,\text{Cosh}y - \text{Sinh}x\,\text{Sinh}y$

4. ప్రతీ $x \in$ R కు

(i) $\text{Sinh}2x = 2\text{Sinh}x\text{Cosh}x = \dfrac{2\tanh x}{1 - \tanh^2 x}$

(ii) $\text{Cosh}2x = 2\text{Cosh}^2x - 1$

$1 + 2\text{Sinh}^2x$

$\dfrac{1 + \tanh^2 x}{1 - \tanh^2 x}$

$\text{Cosh}^2x + \text{Sinh}^2x$

5. ప్రతీ $x, y \in$ R కు

(i) $\tanh(x + y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$

(ii) $\tanh(x - y) = \dfrac{\tanh x - \tanh y}{1 - \tanh x \tanh y}$

6. ప్రతీ $x \in$ R కు

(i) $\tanh 2x = \dfrac{2\tanh x}{1 + \tanh^2 x}$

(ii) $\text{Coth}2x = \dfrac{\text{Cot h}^2 x + 1}{2\text{Coth}x}$

సిద్ధాంతం: ప్రతీ $x \in$ R కు

$$\text{Sinh}^{-1}x = \log_e(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

సిద్ధాంతం: ప్రతీ $x \in [1, \infty)$ కు

$$\text{Cosh}^{-1}x = \log_e(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

సిద్ధాంతం: ప్రతీ $x \in (-1, 1)$ కు

$$\tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$$

PROBLEMS

1. $\text{Sinh}x = \frac{3}{4}$ **అయితే** Cosh(2x), Sinh(2x) **విలువలు కనుక్కోండి.**

Sol: $\text{Cosh}^2 x = 1 + \text{Sinh}^2 x$

$= 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2$

$= 1 + \frac{9}{16}$

$= \frac{25}{16}$

$\text{Cosh}x = \frac{5}{4}$

$\text{Cosh}2x = \text{Cosh}^2 x + \text{Sinh}^2 x$

$= \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2$

$= \frac{25}{16} + \frac{9}{16}$

$= \frac{34}{16} = \frac{17}{8}$

$\text{Sinh}2x = 2\text{Sinh}x\text{Cosh}x = 2\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{15}{8}$

2. $\text{Sinh}x = 3$ **అయినపుడు** $x = \log_e(3+\sqrt{10})$ **అని చూపండి.**

Sol: $\text{Sinh}x = 3$

$x = \text{Sinh}^{-1}(3)$

$= \log_e(3+\sqrt{3^2+1})$ $\qquad [\because \text{Sinh}^{-1}x = \log_e(x+\sqrt{x^2+1})\,]$

$x = \log_e(3+\sqrt{10})$

3. **ప్రతీ** $n \in \text{R}$ **కు**

(i) $(\text{Cosh}x - \text{Sinh}x)^n = \text{Cosh}(nx) - \text{Sinh}(nx)$

(ii) $(\text{Cosh}x + \text{Sinh}x)^n = \text{Cosh}(nx) + \text{Sinh}(nx)$ **అని చూపండి.**

Sol: (i) $(\text{Cosh}x - \text{Sinh}x)^n = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2} - \frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^n$

$= \left(\frac{e^x+e^{-x}-e^x+e^{-x}}{2}\right)^n$

$$= \left(\frac{2e^{-x}}{2}\right)^n$$

$= e^{-nx}$

$$= \left(\frac{e^{nx}+e^{-nx}}{2}\right) - \left(\frac{e^{nx}-e^{-nx}}{2}\right)$$

$= \text{Cosh}(nx) - \text{Sinh}(nx)$

(ii) $(\text{Cosh}x + \text{Sinh}x)^n = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2} + \frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^n$

$$= \left(\frac{e^x+e^{-x}+e^x+e^{-x}}{2}\right)^n$$

$$= \left(\frac{2e^x}{2}\right)^n$$

$= e^{nx}$

$$= \left(\frac{e^{nx}+e^{-nx}}{2}\right) + \left(\frac{e^{nx}-e^{-nx}}{2}\right)$$

$= \text{Cosh}(nx) + \text{Sinh}(nx)$

4. ప్రతి $x \in \mathbb{R}$ కు $\text{Cosh}^4x - \text{Sinh}^4x = \text{Cosh}(2x)$ అని చూపండి.

Sol: $\text{Cosh}^4x - \text{Sinh}^4x = (\text{Cosh}^2x + \text{Sinh}^2x)(\text{Cosh}^2x - \text{Sinh}^2x)$

$= \text{Cosh}(2x)\,(1)$

$= \text{Cosh}(2x)$

5. $\text{Tanh}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\log_e 3$ **అని చూపండి.**

Sol: $\text{Tanh}^{-1}x = \frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$$\text{Tanh}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log_e\left(\frac{3/2}{1/2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log_e 3$$

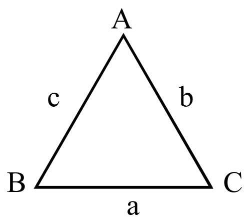
యూనిట్ **10**

త్రిభుజ ధర్మాలు

ముఖ్యాంశాలు - సూత్రాలు

1. ΔABC లో $BC = a, CA = b, AB = c$

$$a + b + c = 2S \Rightarrow S = \frac{a+b+c}{2}$$



2. **Sine సూత్రం:** ΔABC లో

$$\frac{a}{\text{SinA}} = \frac{b}{\text{SinB}} = \frac{c}{\text{SinC}} = 2R$$

$R -$ ΔABC యొక్క పరివృత్త వ్యాసార్థం

3. **Cosine సూత్రం:** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\text{CosA}$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\,\text{CosB}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,\text{CosC}$

$$\text{CosA} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\ ;\ \text{CosB} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}\ ;\ \text{CosC} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

4. **లంబ విక్షేప సూత్రాలు:**

$a = b\text{CosC} + c\text{CosB}$

$b = c\text{CosA} + a\text{CosC}$

$c = a\text{CosB} + b\text{CosA}$

5. **నేపియర్ (OR) టాంజెంట్ సూత్రం:**

$$\tan\left(\frac{B-C}{2}\right) = \left(\frac{b-c}{b+c}\right)\text{Cot}\frac{A}{2}$$

$$\tan\left(\frac{A-B}{2}\right) = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)\text{Cot}\frac{C}{2}$$

$$\tan\left(\frac{C-A}{2}\right) = \left(\frac{c-a}{c+a}\right)\text{Cot}\frac{B}{2}$$

6. $\text{Sin}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$; $\text{Sin}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$; $\text{Sin}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$

$\text{Cos}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$; $\text{Cos}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}$; $\text{Cos}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$

$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$; $\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$; $\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

7. ΔABC **వైశాల్యము** $\Delta = \frac{1}{2}bc\text{SinA} = \frac{1}{2}ca\text{SinB} = \frac{1}{2}ab\text{SinC}$

$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 2R^2\text{SinASinBSinC}.$

8. $\tan\frac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{\Delta}$; $\tan\frac{B}{2} = \frac{(s-a)(s-c)}{\Delta}$; $\tan\frac{C}{2} = \frac{(s-a)(s-b)}{\Delta}$

$\text{Cot}\frac{A}{2} = \frac{s(s-a)}{\Delta}$; $\text{Cot}\frac{B}{2} = \frac{s(s-b)}{\Delta}$; $\text{Cot}\frac{C}{2} = \frac{s(s-c)}{\Delta}$

9. $r = \frac{\Delta}{s}$; $r_1 = \frac{\Delta}{s-a}$; $r_2 = \frac{\Delta}{s-b}$; $r_3 = \frac{\Delta}{s-c}$

r – అంతరవృత్త వ్యాసార్థం

r_1, r_2, r_3 –బాహ్యావృత్త వ్యాసార్థాలు

10. $r = \frac{\Delta}{s} = 4R\,\text{Sin}\frac{A}{2}\,\text{Sin}\frac{B}{2}\,\text{Sin}\frac{C}{2}$

11. $r_1 = \frac{\Delta}{s-a} = 4R\,\text{Sin}\frac{A}{2}\,\text{Cos}\frac{B}{2}\,\text{Cos}\frac{C}{2} = S\tan\frac{A}{2}$

12. $r_2 = \frac{\Delta}{s-b} = 4R\,\text{Cos}\frac{A}{2}\,\text{Sin}\frac{B}{2}\,\text{Cos}\frac{C}{2} = S\tan\frac{B}{2}$

13. $r_3 = \frac{\Delta}{s-c} = 4R\,\text{Cos}\frac{A}{2}\,\text{Cos}\frac{B}{2}\,\text{Sin}\frac{C}{2} = S\tan\frac{C}{2}$

14. $\Delta^2 = rr_1r_2r_3$

15. $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$

స్వల్ప మరియు దీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు

(గమనిక: క్రింది సమస్యలన్నింటిలో ΔABC ని గణనలోకి తీసికొనవలెను)

1. ΔABC **లో a = 3, b = 4 మరియు** $\text{SinA} = \frac{3}{4}$ **అయిన** $\angle B$ **కనుగొనుము.**

Sol: Sine సూత్రం నుండి $\frac{a}{\text{SinA}} = \frac{b}{\text{SinB}}$

aSinB = bSinA

$\text{SinB} = \frac{\text{bSinA}}{a} = \frac{4\left(\frac{3}{4}\right)}{3} = 1$ $\quad$ ($\because$ దత్తాంశం నుండి b = 4; a = 3; SinA = $\frac{3}{4}$)

$\text{SinB} = 1 = \text{Sin}90^0$

$\angle B = 90^0$

2. a = 26 సెం.మీ.; b = 30 సెం.మీ. మరియు CosC = $\frac{63}{65}$ **అయిన c విలువ కనుగొనుము.**

Sol: కొసైన్ సూత్రం నుండి $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\text{CosC}$

$c^2 = (26)^2 + (30)^2 - 2(26)(30)\left(\frac{63}{65}\right)$ $\quad$ ($\because$ దత్తాంశం నుండి a = 26 సెం.మీ.; b = 30 సెం.మీ., CosC = $\frac{63}{65}$)

$= 676 + 900 - 1512 = 64$

$c^2 = 64 \Rightarrow c = 8$

3. (b + c)CosA + (c + a)CosB + (a + b)CosC = a + b + c అని చూపుము.

Sol: LHS = (b + c)CosA + (c + a)CosB + (a + b)CosC

= bCosA + cCosA + cCosB + aCosB + aCosC + bCosC

= (aCosB + bCosA) + (bCosC + cCosB) + (cCosA + aCosC)

= c + a + b $\quad$ ($\because$ లంబ విక్షేప సూత్రం నుండి)

= a + b + c = RHS

$\therefore$ (b + c)CosA + (c + a)CosB + (a + b)CosC = a + b + c

4. $b\text{Cos}^2\frac{C}{2} + c\text{Cos}^2\frac{B}{2} = s$ **అని చూపుము.**

Sol: LHS = $b\text{Cos}^2\frac{C}{2} + c\text{Cos}^2\frac{B}{2}$

$$= b\left[\frac{s(s-c)}{ab}\right] + c\left[\frac{s(s-b)}{ac}\right]$$

$$= \frac{s(s-c)}{a} + \frac{s(s-b)}{a} = \frac{s}{a}[s - c + s - b] = \frac{s}{a}[2s - b - c]$$

$$= \frac{s}{a}[a + b + c - b - c]$$

$$= \frac{s}{a}[a] = s = \text{RHS}$$

$$\therefore b\text{Cos}^2\frac{C}{2} + c\text{Cos}^2\frac{B}{2} = s.$$

5. $\dfrac{a}{bc}+\dfrac{CosA}{a}=\dfrac{b}{ca}+\dfrac{CosB}{b}=\dfrac{c}{ab}+\dfrac{CosC}{c}$ **అని చూపుము.**

Sol: $\dfrac{a}{bc}+\dfrac{CosA}{a}=\dfrac{a}{bc}+\dfrac{\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}{a}$ (∵ కొసైన్ సూత్రం నుండి, $CosA=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$)

$=\dfrac{a}{bc}+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2abc}=\dfrac{2a^2+b^2+c^2-a^2}{2abc}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

ఇదేవిధంగా $\dfrac{b}{ca}+\dfrac{CosB}{b}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$ మరియు

$\dfrac{c}{ab}+\dfrac{CosC}{c}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$ అని నిరూపించవచ్చు.

$\therefore \dfrac{a}{bc}+\dfrac{CosA}{a}=\dfrac{b}{ca}+\dfrac{CosB}{b}=\dfrac{c}{ab}+\dfrac{CosC}{c}$

6. $\dfrac{CosA}{a}+\dfrac{CosB}{b}+\dfrac{CosC}{c}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$ **అని చూపుము.**

Sol: $LHS=\dfrac{CosA}{a}+\dfrac{CosB}{b}+\dfrac{CosC}{c}$

$=\dfrac{\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}{a}+\dfrac{\left(\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)}{b}+\dfrac{\left(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)}{c}$ (∵ కొసైన్ సూత్రం నుండి)

$=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2abc}+\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2abc}+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2abc}$

$=\dfrac{b^2+c^2-a^2+c^2-b^2+a^2+a^2+b^2-c^2}{2abc}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}=RHS$

$\therefore \dfrac{CosA}{a}+\dfrac{CosB}{b}+\dfrac{CosC}{c}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

7. $aSin^2\dfrac{C}{2}+cSin^2\dfrac{A}{2}$ **ను s, a, b, c పదాలలో వ్రాయండి.**

Sol: $aSin^2\dfrac{C}{2}+cSin^2\dfrac{A}{2}=a\left[\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}\right]+c\left[\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}\right]$

$=\dfrac{(s-a)(s-b)}{b}+\dfrac{(s-b)(s-c)}{b}$

$$= \frac{s-b}{b}[s-a+s-c] = \frac{s-b}{b}[2s-a\ -c] = \frac{s-b}{b}[a+b+c-a\ -c]$$

$$= \frac{s-b}{b}[b] = s-b$$

$$\therefore\ a\mathrm{Sin}^2\frac{C}{2} + c\mathrm{Sin}^2\frac{A}{2} = s-b$$

8. $\mathrm{Cot}\frac{A}{2}+\mathrm{Cot}\frac{B}{2}+\mathrm{Cot}\frac{C}{2}=\frac{s^2}{\Delta}$ **అని నిరూపించుము.**

Sol: $\mathrm{LHS} = \mathrm{Cot}\frac{A}{2}+\mathrm{Cot}\frac{B}{2}+\mathrm{Cot}\frac{C}{2}$

$$= \frac{s(s-a)}{\Delta}+\frac{s(s-b)}{\Delta}+\frac{s(s-c)}{\Delta} = \frac{s}{\Delta}[s-a+s-b+s-c]$$

$$= \frac{s}{\Delta}[3s-(a+b+c)] = \frac{s}{\Delta}[3s-2s]$$

$$= \frac{s}{\Delta}.[s] = \frac{s^2}{\Delta} = \mathrm{RHS}$$

$$\therefore\ \mathrm{Cot}\frac{A}{2}+\mathrm{Cot}\frac{B}{2}+\mathrm{Cot}\frac{C}{2}=\frac{s^2}{\Delta}$$

9. $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\frac{bc+ca+ab-s^2}{\Delta}$ **అని నిరూపించుము.**

Sol: $\mathrm{LHS} = \tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\frac{(s-b)(s-c)}{\Delta}+\frac{(s-a)(s-c)}{\Delta}+\frac{(s-a)(s-b)}{\Delta}$

$$= \frac{s^2-s(b+c)+bc+s^2-s(a+c)+ac+s^2-s(a+b)+ab}{\Delta}$$

$$= \frac{3s^2-2s(a+b+c)+ab+bc+ca}{\Delta} = \frac{ab+bc+ca\ -s^2}{\Delta} = \mathrm{RHS}$$

$$\therefore\ \tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\frac{bc+ca+ab-s^2}{\Delta}$$

10. $\mathrm{Sin}\Theta=\frac{a}{b+c}$ **అయిన** $\mathrm{Cos}\theta = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\mathrm{Cos}\frac{A}{2}$ **అని చూపుము.**

Sol: దత్తాంశం నుండి $\mathrm{Sin}\Theta=\frac{a}{b+c}$ ....(1)

$\mathrm{Cos}^2\theta + \mathrm{Sin}^2\theta = 1$ అని మనకు తెలుసు.

$$\text{Cos}^2\theta = 1 - \text{Sin}^2\theta = 1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2 \qquad [\because (1) \text{ నుండి}]$$

$$= 1 - \frac{a^2}{(b+c)^2} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2} = \frac{(b+c+a)\,(b+c-a)}{(b+c)^2}$$

$$= \frac{2s\,(2s-a-a)}{(b+c)^2} = \frac{2s\,.\,2(s-a)}{bc}.\frac{bc}{(b+c)^2}$$

$$\text{Cos}^2\theta = \frac{4s(s-a)}{bc}.\frac{bc}{(b+c)^2} = 4\text{Cos}^2\frac{A}{2}.\frac{bc}{(b+c)^2} = \frac{4bc}{(b+c)^2}.\text{Cos}^2\frac{A}{2}$$

$$\therefore\ \text{Cos}\theta = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\text{Cos}\frac{A}{2}$$

11. **$a = (b + c)\text{Cos}\theta$ అయిన $\text{Sin}\theta = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\text{Cos}\frac{A}{2}$ అని చూపుము.**

Sol: దత్తాంశం నుండి, $a = (b + c)\text{Cos}\theta \Rightarrow \text{Cos}\theta = \frac{a}{b+c}$

$$\text{Sin}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1$$

$$\text{Sin}^2\theta = 1 - \text{Cos}^2\theta = 1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2 = 1 - \frac{a^2}{(b+c)^2} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2}$$

$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2} = \frac{(2s)(2s-a-a)}{(b+c)^2} = \frac{(2s)2(s-a)}{(b+c)^2}$$

$$= 4.\frac{s(s-a)}{bc}.\frac{bc}{(b+c)^2} = 4.\text{Cos}^2\frac{A}{2}.\frac{bc}{(b+c)^2}$$

$$\text{Sin}^2\theta = 4\frac{bc}{(b+c)^2}\,.\text{Cos}^2\frac{A}{2}$$

$$\therefore\ \text{Sin}\theta = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\text{Cos}\frac{A}{2}$$

12. **$a = (b - c)\ \text{Sec}\theta$ అయిన $\tan\theta = \frac{2\sqrt{bc}}{b-c}\text{Sin}\frac{A}{2}$ అని నిరూపించుము.**

Sol: $a = (b - c)\ \text{Sec}\theta \Rightarrow \text{Sec}\theta = \frac{a}{b-c}$

$$\tan^2\theta = \text{Sec}^2\theta - 1 = \left(\frac{a}{b-c}\right)^2 - 1$$

$$\tan^2\theta = \frac{a^2 - (b - c)^2}{(b - c)^2} = \frac{(a + b - c)\,(a - b + c)}{(b - c)^2}$$

$$= \frac{2(s - c).\,2(s - b)}{(b - c)^2} = \frac{4(s - c)(s - b)}{bc}.\frac{bc}{(b - c)^2}$$

$$\tan^2\theta = 4\frac{bc}{(b - c)^2}\mathrm{Sin}^2\frac{A}{2}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{2\sqrt{bc}}{b - c}\mathrm{Sin}\frac{A}{2}$$

13. **CotA + CotB + CotC =** $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\Delta}$ **అని నిరూపించుము.**

Sol: $\mathrm{Cot}A + \mathrm{Cot}B + \mathrm{Cot}C = \sum \mathrm{Cot}A = \sum \frac{\mathrm{Cos}A}{\mathrm{Sin}A}$

$$= \sum\left(\frac{\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)}{\mathrm{Sin}A}\right) = \sum\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc\mathrm{Sin}A}\right)$$

$$= \sum \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4\Delta} \qquad [\because \Delta = \frac{1}{2}bc\mathrm{Sin}A]$$

$$= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4\Delta} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4\Delta} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4\Delta}$$

$$= \frac{b^2 + c^2 - a^2 + c^2 + a^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2}{4\Delta} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\Delta} = \mathrm{RHS}$$

$$\therefore \mathrm{Cot}A + \mathrm{Cot}B + \mathrm{Cot}C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\Delta}$$

14. ΔABCలో $\frac{1}{a + c} + \frac{1}{b + c} = \frac{3}{a + b + c}$ **అయిన** $\angle C = 60^0$ **అని చూపుము.**

Sol: $\frac{1}{a + c} + \frac{1}{b + c} = \frac{3}{a + b + c}$

$$\frac{b + c + a + c}{(a + c)(b + c)} = \frac{3}{a + b + c}$$

$(a + b + 2c)\,(a + b + c) = 3(a + c)\,(b + c)$

$a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + 2ac + 2bc + 2c^2 = 3\,[ab + ac + bc + c^2]$

$a^2 + b^2 - c^2 = ab$

$2abCosC = ab$ $(\because$ కొసైన్ సూత్రం నుండి$)$

$2CosC = 1$

$CosC = \frac{1}{2} = Cos60^0$

$\therefore \angle C = 60^0$

15. ΔABC**లో** $aCosA = bCosB$ **అయిన ఆ త్రిభుజము సమద్విబాహు లేదా లంబకోణ త్రిభుజమని చూపుము.**

Sol: $aCosA = bCosB$

$2RSinACosA = 2RSinBCosB$ $(\because$ Sine సూత్రం నుండి$)$

$Sin2A = Sin2B = Sin(180 - 2B)$

$2A = 2B$ (లేదా) $2A = 180 - 2B$

$A = B$ (లేదా) $A = 90 - B$

$A = B$ (లేదా) $A + B = 90^0$

$\Rightarrow a = b$ (లేదా) $\angle C = 90^0$

$\therefore$ ΔABC సమద్విబాహు (లేదా) లంబకోణ త్రిభుజము.

16. **$a : b : c = 7 : 8 : 9$ అయిన $CosA : CosB : CosC$ విలువ కనుగొనుము.**

Sol: $a : b : c = 7 : 8 : 9$

$\frac{a}{7} = \frac{b}{8} = \frac{c}{9} = k$

$a = 7k;\ b = 8k;\ c = 9k$

$$CosA = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{64k^2 + 81k^2 - 49k^2}{2(8k)(9k)} = \frac{96k^2}{144k^2} = \frac{2}{3}$$

$$CosB = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{49k^2 + 81k^2 - 64k^2}{2(7k)(9k)} = \frac{66k^2}{126k^2} = \frac{11}{21}$$

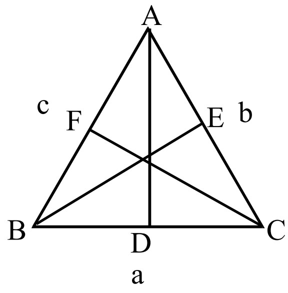
$$CosC = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{49k^2 + 64k^2 - 81k^2}{2(7k)(8k)} = \frac{32k^2}{112k^2} = \frac{2}{7}$$

$$\therefore\ CosA : CosB : CosC = \frac{2}{3} : \frac{11}{21} : \frac{2}{7} = \left(\frac{2\times 7}{3\times 7}\right) : \frac{11}{21} : \left(\frac{2\times 3}{7\times 3}\right)$$

$CosA : CosB : CosC = 14 : 11 : 6$

17. ΔABC**లో** P_1, P_2, P_3 **లు ఉన్నతులు అయిన** $\frac{1}{P_1^2} + \frac{1}{P_2^2} + \frac{1}{P_3^2} = \frac{CotA + CotB + CotC}{\Delta}$ **అని చూపుము.**

Sol: ΔABC లో ఉన్నతులు AD, BE, CF



$AD = P_1$, $BE = P_2$, $CF = P_3$

$$\Delta = \frac{1}{2} BC \times AD = \frac{1}{2} CA \times BE = \frac{1}{2} AB \times CF$$

$$\Delta = \frac{1}{2} a.P_1 = \frac{1}{2} b.P_2 = \frac{1}{2} c.P_3$$

$$\therefore\ P_1 = \frac{2\Delta}{a}\ ;\ P_2 = \frac{2\Delta}{b};\ P_3 = \frac{2\Delta}{c}$$

$$\frac{1}{P_1^2}+\frac{1}{P_2^2}+\frac{1}{P_3^2} = \frac{a^2}{4\Delta^2}+\frac{b^2}{4\Delta^2}+\frac{c^2}{4\Delta^2} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta^2}$$

$$= \frac{1}{\Delta}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}\right) = \frac{1}{\Delta}\left(\text{CotA} + \text{CotB} + \text{CotC}\right)$$

($\because$ సమస్య - 13 నుండి)

$$\therefore \frac{1}{P_1^2}+\frac{1}{P_2^2}+\frac{1}{P_3^2} = \frac{\text{CotA+CotB+CotC}}{\Delta}$$

18. $\sum a\text{CotA} = 2(R + r)$ **అని చూపుము.**

Sol: $\text{LHS} = \sum a\text{CotA} = \sum 2R\text{SinA}\frac{\text{CosA}}{\text{SinA}} = \sum 2R\text{CosA}$

$= 2R\ (\text{CosA} + \text{CosB} + \text{CosC})$

$$= 2R\left(1 + 4\text{Sin}\frac{A}{2}\text{Sin}\frac{B}{2}\text{Sin}\frac{C}{2}\right)$$

($\because \text{CosA} + \text{CosB} + \text{CosC} = 1 + 4\text{Sin}\frac{A}{2}\text{Sin}\frac{B}{2}\text{Sin}\frac{C}{2}$ త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల, పరివర్తనల నుండి)

$$= 2\left[R + 4R\text{Sin}\frac{A}{2}\text{Sin}\frac{B}{2}\text{Sin}\frac{C}{2}\right]$$

$= 2[R + r]$

$$\therefore\ \sum a\text{CotA} = 2(R + r)$$

19. $\mathbf{r(r_1 + r_2 + r_3) = ab + bc + ca - s^2}$ **అని నిరూపించుము.**

Sol: $\text{LHS} = r(r_1 + r_2 + r_3) = \frac{\Delta}{s}\left(\frac{\Delta}{s-a}+\frac{\Delta}{s-b}+\frac{\Delta}{s-c}\right)$

$$= \frac{\Delta^2}{s}\left(\frac{(s-b)(s-c)+(s-a)(s-c)+(s-a)(s-b)}{(s-a)(s-b)(s-c)}\right)$$

$$= \frac{\Delta^2[s^2 - s(b+c) + s^2 - s(a+c) + s^2 - s(a+b) + bc + ac + ab]}{\Delta^2}$$

$= 3s^2 - 2s(a + b + c) + ab + bc + ca$

$= 3s^2 - 2s(2s) + ab + bc + ca$

$= ab + bc + ca - s^2 = \text{RHS}$

$\therefore\ r(r_1 + r_2 + r_3) = ab + bc + ca - s^2$

20. ΔABC లో $\mathbf{r_1 + r_2 + r_3 - r = 4R}$ అని నిరూపించుము.

Sol: $r_1 + r_2 + r_3 - r$

$$= 4R\,\text{Sin}\frac{A}{2}\,\text{Cos}\frac{B}{2}\text{Cos}\frac{C}{2} + 4R\,\text{Cos}\frac{A}{2}\text{Sin}\frac{B}{2}\,\text{Cos}\frac{C}{2} + 4R\,\text{Cos}\frac{A}{2}\text{Cos}\frac{B}{2}\,\text{Sin}\frac{C}{2}$$

$$- 4R\,\text{Sin}\frac{A}{2}\,\text{Sin}\frac{B}{2}\,\text{Sin}\frac{C}{2}$$

$$= 4R\text{Cos}\frac{C}{2}\left[\text{Sin}\frac{A}{2}\text{Cos}\frac{B}{2} + \text{Cos}\frac{A}{2}\text{Sin}\frac{B}{2}\right] + 4R\text{Sin}\frac{C}{2}\left[\text{Cos}\frac{A}{2}\text{Cos}\frac{B}{2} - \text{Sin}\frac{A}{2}\text{Sin}\frac{B}{2}\right]$$

$$= 4R\text{Cos}\frac{C}{2}\text{Sin}\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) + 4R\text{Sin}\frac{C}{2}\text{Cos}\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)$$

$$= 4R\text{Cos}\frac{C}{2}\text{Sin}\left(\frac{A+B}{2}\right) + 4R\text{Sin}\frac{C}{2}\text{Cos}\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 4R\text{Sin}\left(\frac{A+B}{2} + \frac{C}{2}\right) = 4R\text{Sin}\left(\frac{A+B+C}{2}\right) = 4R\text{Sin}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$= 4R(1) = 4R = \text{RHS}$

$\therefore\ r_1 + r_2 + r_3 - r = 4R$

21. ΔABCలో $r + r_1 + r_2 - r_3 = 4R\text{Cos}C$ అని నిరూపించుము.

Sol: $\text{LHS} = r + r_1 + r_2 - r_3$

$$4R\,\text{Sin}\frac{A}{2}\,\text{Sin}\frac{B}{2}\,\text{Sin}\frac{C}{2} + 4R\,\text{Sin}\frac{A}{2}\,\text{Cos}\frac{B}{2}\,\text{Cos}\frac{C}{2} + 4R\,\text{Cos}\frac{A}{2}\,\text{Sin}\frac{B}{2}\,\text{Cos}\frac{C}{2}$$

$$- 4R\,\text{Cos}\frac{A}{2}\,\text{Cos}\frac{B}{2}\,\text{Sin}\frac{C}{2}$$

$$= 4R\text{Sin}\frac{A}{2}\left[\text{Sin}\frac{B}{2}\text{Sin}\frac{C}{2} + \text{Cos}\frac{B}{2}\text{Cos}\frac{C}{2}\right] + 4R\text{Cos}\frac{A}{2}\left[\text{Sin}\frac{B}{2}\text{Cos}\frac{C}{2} - \text{Cos}\frac{B}{2}\text{Sin}\frac{C}{2}\right]$$

$$= 4R\text{Sin}\frac{A}{2}\text{Cos}\left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2}\right) + 4R\text{Cos}\frac{A}{2}\text{Sin}\left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2}\right)$$

$$= 4R\left[\text{Sin}\frac{A}{2}\text{Cos}\left(\frac{B-C}{2}\right) + \text{Cos}\frac{A}{2}\text{Sin}\left(\frac{B-C}{2}\right)\right]$$

$$= 4R.\text{Sin}\left(\frac{A}{2} + \frac{B\text{-}C}{2}\right) = 4R\text{Sin}\left(\frac{A+B-C}{2}\right)$$

$$= 4R\text{Sin}\left(\frac{\pi - C - C}{2}\right) = 4R\text{Sin}\left(\frac{\pi}{2} - C\right)$$

$$= 4R\text{Cos}C = \text{RHS}$$

$$\therefore r + r_1 + r_2 - r_3 = 4R\text{Cos}C$$

22. $\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right) = \frac{abc}{\Delta^3} = \frac{4R}{r^2s^2}$ **అని నిరూపించుము.**

Sol: $\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)$

$$= \left(\frac{s}{\Delta} - \frac{s-a}{\Delta}\right)\left(\frac{s}{\Delta} - \frac{s-b}{\Delta}\right)\left(\frac{s}{\Delta} - \frac{s-c}{\Delta}\right) = \left(\frac{s-s+a}{\Delta}\right)\left(\frac{s-s+b}{\Delta}\right)\left(\frac{s-s+c}{\Delta}\right)$$

$$= \left(\frac{a}{\Delta}\right)\left(\frac{b}{\Delta}\right)\left(\frac{c}{\Delta}\right) = \frac{abc}{\Delta^3} = \frac{4R\Delta}{\Delta^3} = \frac{4R}{\Delta^2} \qquad \left[\because \Delta = \frac{abc}{4R}, abc = 4R\Delta\right]$$

$$= \frac{4R}{(rs)^2} = \frac{4R}{r^2s^2} \qquad [\because \Delta = rs]$$

$$\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right) = \frac{abc}{\Delta^3} = \frac{4R}{r^2s^2}$$

23. $\sum \frac{r_1}{(s-b)(s-c)} = \frac{3}{r}$ **అని చూపుము.**

Sol: $\text{LHS} = \sum \frac{r_1}{(s-b)(s-c)} = \sum \frac{\Delta}{(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad \left[\because r_1 = \frac{\Delta}{s\text{-}a}\right]$

$$= \sum \frac{\Delta}{\left(\frac{\Delta^2}{s}\right)} \qquad \left[\because \Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)\right]$$

$$= \sum \frac{s\Delta}{\Delta^2} = \sum \frac{s}{\Delta} = \frac{s}{\Delta} + \frac{s}{\Delta} + \frac{s}{\Delta} = \frac{3s}{\Delta}$$

$$= 3\left(\frac{s}{\Delta}\right) = 3\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3}{r} = \text{RHS}$$

$$\therefore \sum \frac{r_1}{(s-b)(s-c)} = \frac{3}{r}$$

24. $\mathbf{CosA + CosB + CosC = 1 + \frac{r}{R}}$ **అని చూపుము.**

Sol: LHS = CosA + CosB + CosC = $2\text{Cos}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{Cos}\left(\frac{A-B}{2}\right) + \text{CosC}$

$= 2\text{Sin}\frac{C}{2}\text{Cos}\left(\frac{A-B}{2}\right) + 1 - 2\text{Sin}^2\frac{C}{2}$ $\left(\because \frac{A+B}{2} = 90 - \frac{C}{2},\ \text{Cos}\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sin\frac{C}{2}\right)$

$= 1 + 2\text{Sin}\frac{C}{2}\left[\text{Cos}\left(\frac{A-B}{2}\right) - \text{Sin}\frac{C}{2}\right]$

$= 1 + 2\text{Sin}\frac{C}{2}\left[\text{Cos}\left(\frac{A-B}{2}\right) - \text{Cos}\left(\frac{A+B}{2}\right)\right]$

$= 1 + 2\text{Sin}\frac{C}{2}\left[2\text{Sin}\frac{A}{2}\text{Sin}\frac{B}{2}\right]$

$= 1 + 4\text{Sin}\frac{A}{2}\text{Sin}\frac{B}{2}\text{Sin}\frac{C}{2}$

$= 1 + \frac{4\text{Sin}\frac{A}{2}\text{Sin}\frac{B}{2}\text{Sin}\frac{C}{2}}{R} = 1 + \frac{r}{R} = \text{RHS}$

$\therefore \text{CosA} + \text{CosB} + \text{CosC} = 1 + \frac{r}{R}$

25. $\text{Cos}^2\frac{A}{2} + \text{Cos}^2\frac{B}{2} + \text{Cos}^2\frac{C}{2} = 2 + \frac{r}{2R}$ **అని చూపుము.**

Sol: $\text{Cos}^2\frac{A}{2} + \text{Cos}^2\frac{B}{2} + \text{Cos}^2\frac{C}{2} = \text{Cos}^2\frac{A}{2} + 1 - \text{Sin}^2\frac{B}{2} + \text{Cos}^2\frac{C}{2}$

$= 1 + \left(\text{Cos}^2\frac{A}{2} - \text{Sin}^2\frac{B}{2}\right) + \text{Cos}^2\frac{C}{2} = 1 + \text{Cos}\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{Cos}\left(\frac{A-B}{2}\right) + \text{Cos}^2\frac{C}{2}$

$= 1 + \text{Sin}\frac{C}{2}\text{Cos}\left(\frac{A-B}{2}\right) + 1 - \text{Sin}^2\frac{C}{2}$ $\left[\begin{array}{l}\because \frac{A+B}{2} = 90 - \frac{C}{2} \\ \text{Cos}\left(\frac{A+B}{2}\right) = \text{Sin}\frac{C}{2}\end{array}\right]$

$= 2 + \text{Sin}\frac{C}{2}\left[\text{Cos}\left(\frac{A-B}{2}\right) - \text{Sin}\frac{C}{2}\right]$

$= 2 + \text{Sin}\frac{C}{2}\left[\text{Cos}\left(\frac{A-B}{2}\right) - \text{Cos}\left(\frac{A+B}{2}\right)\right]$

$$= 2 + \mathrm{Sin}\frac{C}{2}\left[2\mathrm{Sin}\frac{A}{2}\mathrm{Sin}\frac{B}{2}\right] = 2 + 2\mathrm{Sin}\frac{A}{2}\mathrm{Sin}\frac{B}{2}\mathrm{Sin}\frac{C}{2}$$

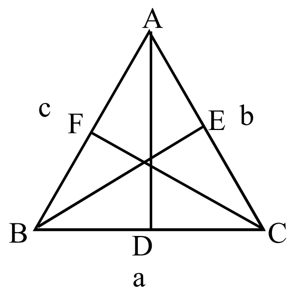
$$= 2 + \frac{(2R)\,.\,2\mathrm{Sin}\frac{A}{2}\mathrm{Sin}\frac{B}{2}\mathrm{Sin}\frac{C}{2}}{2R} = 2 + \frac{4R\mathrm{Sin}\frac{A}{2}\mathrm{Sin}\frac{B}{2}\mathrm{Sin}\frac{C}{2}}{2R}$$

$$= 2 + \frac{r}{2R} = \mathrm{RHS}$$

$$\therefore \mathrm{Cos}^2\frac{A}{2} + \mathrm{Cos}^2\frac{B}{2} + \mathrm{Cos}^2\frac{C}{2} = 2 + \frac{r}{2R}$$

26. **ΔABCలో A, B, C శీర్షాల నుండి ఎదుటి భుజాల మీదకు గీచిన ఉన్నతులు P_1, P_2, P_3 అయిన (i) $\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_3} = \frac{1}{r}$ (ii) $\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} - \frac{1}{P_3} = \frac{1}{r_3}$ (iii) $P_1 P_2 P_3 = \frac{(abc)^2}{8R^3} = \frac{8\Delta^3}{abc}$ అని చూపుము.**

Sol: ΔABC లో



$AD = P_1$, $BE = P_2$, $CF = P_3$ లు ఉన్నతులు

$$\Delta = \frac{1}{2}a.P_1 = \frac{1}{2}b.P_2 = \frac{1}{2}c.P_3$$

$$2\Delta = aP_1,\ 2\Delta = bP_2;\ 2\Delta = cP_3$$

$$P_1 = \frac{2\Delta}{a};\ P_2 = \frac{2\Delta}{b};\ P_3 = \frac{2\Delta}{c}$$

(i) $$\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_3} = \frac{a}{2\Delta} + \frac{b}{2\Delta} + \frac{c}{2\Delta} = \frac{a+b+c}{2\Delta} = \frac{2s}{2\Delta} = \frac{s}{\Delta} = \frac{1}{r}$$

(ii) $$\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} - \frac{1}{P_3} = \frac{a}{2\Delta} + \frac{b}{2\Delta} - \frac{c}{2\Delta} = \frac{a+b-c}{2\Delta} = \frac{2s-c-c}{2\Delta} = \frac{2(s-c)}{2\Delta} = \frac{s-c}{\Delta} = \frac{1}{r_3}$$

(iii) $$P_1 P_2 P_3 = \frac{2\Delta}{a} \times \frac{2\Delta}{b} \times \frac{2\Delta}{c} = \frac{8\Delta^3}{abc}$$

$$= \frac{8\left(\frac{abc}{4R}\right)^3}{abc} = \frac{8(abc)^3}{(64R^3)abc} = \frac{(abc)^2}{8R^3}$$

$$\therefore P_1 P_2 P_3 = \frac{(abc)^2}{8R^3} = \frac{8\Delta^3}{abc}$$

27. **$a = 13, b = 14, c = 15$ అయిన $R = \frac{65}{8}$, $r = 4$, $r_1 = \frac{21}{2}$, $r_2 = 12$ మరియు $r_3 = 14$ అని చూపుము.**

Sol: $a = 13, b = 14, c = 15$

$2s = a + b + c = 13 + 14 + 15 = 42$

$s = 21$

$\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) = 21(21-13)(21-14)(21-15)$

$= (21)(8)(7)(6)$

$\Delta = \sqrt{21\times8\times7\times6} = \sqrt{7\times3\times2\times2\times2\times7\times2\times3} = 7\times3\times2\times2 = 84$

$\Delta = 84$

$R = \dfrac{abc}{4\Delta} = \dfrac{13\times14\times15}{4\times84} = \dfrac{65}{8}$

$r = \dfrac{\Delta}{s} = \dfrac{84}{21} = 4$

$r_1 = \dfrac{\Delta}{s-a} = \dfrac{84}{21-13} = \dfrac{84}{8} = \dfrac{21}{2}$

$r_2 = \dfrac{\Delta}{s-b} = \dfrac{84}{21-14} = \dfrac{84}{7} = 12$

$r_3 = \dfrac{\Delta}{s-c} = \dfrac{84}{21-15} = \dfrac{84}{6} = 14$

$\therefore$ **$R = \dfrac{65}{8}$, $r = 4$, $r_1 = \dfrac{21}{2}$, $r_2 = 12$, $r_3 = 14$**

28. $r_1 = 2, r_2 = 3, r_3 = 6$ మరియు $r = 1$ అయిన $a = 3, b = 4, c = 5$ అని చూపుము.

Sol: $r_1 = 2, r_2 = 3, r_3 = 6, r = 1$

$\Delta^2 = r\,r_1 r_2 r_3 = (1)(2)(3)(6) = 36$

$\Delta = 6$

$r = \dfrac{\Delta}{s} \Rightarrow s = \dfrac{\Delta}{r} = \dfrac{6}{1} = 6$

$s = 6$

$r_1 = \dfrac{\Delta}{s-a} \Rightarrow s - a = \dfrac{\Delta}{r_1} = \dfrac{6}{2} = 3$

$s - a = 3$

$6 - a = 3$

$a = 3$

$r_2 = \dfrac{\Delta}{s-b} \Rightarrow s - b = \dfrac{\Delta}{r_2} = \dfrac{6}{3} = 2$

$s - b = 2 \Rightarrow 6 - b = 2$

$b = 4$

$r_3 = \dfrac{\Delta}{s-c} \Rightarrow s - c = \dfrac{\Delta}{r_3} = \dfrac{6}{6} = 1$

$6 - c = 1$

c = 5

$\therefore$ a = 3, b = 4, c = 5

29. ΔABC**లో** $r_1 = 8, r_2 = 12, r_3 = 24$ **అయిన a, b, c లను కనుగొనుము.**

Sol. $r_1 = 8, r_2 = 12, r_3 = 24$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{3+2+1}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

r = 4

$\Delta^2 = r\, r_1 r_2 r_3 = (4)(8)(12)(24) = 4 \times 8 \times 12 \times 12 \times 2 = 12 \times 8 \times 12 \times 8$

$\Delta = 12 \times 8 = 96$

$\Delta = 96$

$$\Delta = rs \Rightarrow s = \frac{\Delta}{r} = \frac{96}{4} = 24$$

s = 24

$$r_1 = \frac{\Delta}{s - a} \Rightarrow s - a = \frac{\Delta}{r_1} = \frac{96}{8} = 12$$

s – a = 12

$24 - a = 12 \Rightarrow a = 12$

$$r_2 = \frac{\Delta}{s - b} \Rightarrow s - b = \frac{\Delta}{r_2} = \frac{96}{12} = 8$$

s – b = 8

24 – b = 8

b = 16

$$r_3 = \frac{\Delta}{s - c} \Rightarrow s - c = \frac{\Delta}{r_3} = \frac{96}{24} = 4$$

s – c = 4

24 – c = 4

c = 20

$\therefore$ a = 12, b = 16, c = 20

30. $\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} = \frac{a^2+b^2+c^2}{\Delta^2}$ **అని చూపుము.**

Sol: $$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} = \frac{s^2}{\Delta^2} + \frac{(s-a)^2}{\Delta^2} + \frac{(s-b)^2}{\Delta^2} + \frac{(s-c)^2}{\Delta^2}$$

$$= \frac{1}{\Delta^2}\left[s^2 + (s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2\right]$$

$$= \frac{1}{\Delta^2}\left[s^2 + s^2 + a^2 - 2as + s^2 + b^2 - 2bs + s^2 + c^2 - 2cs\right]$$

$$= \frac{1}{\Delta^2}\left[4s^2 - 2s\,(a+b+c) + a^2 + b^2 + c^2\right]$$

$$= \frac{1}{\Delta^2}\left[4s^2 - 2s\,(2s) + a^2 + b^2 + c^2\right]$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\Delta^2} = \text{RHS}$$

$$\therefore \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} = \frac{a^2+b^2+c^2}{\Delta^2}$$

31. $\frac{r_1}{bc} + \frac{r_2}{ca} + \frac{r_3}{ab} = \frac{1}{r} - \frac{1}{2R}$ **అని చూపుము.**

Sol: LHS $= \frac{r_1}{bc} + \frac{r_2}{ca} + \frac{r_3}{ab} = \frac{1}{abc}[ar_1 + br_2 + cr_3]$

$$= \frac{1}{abc}\sum ar_1 = \frac{1}{abc}\sum 2R\text{Sin}A \,.\, s\tan\frac{A}{2}$$

$$= \frac{1}{abc}\sum 2R.\,2\text{Sin}\frac{A}{2}\text{Cos}\frac{A}{2}\; s\cdot\frac{\text{Sin}\,A/2}{\text{Cos}\,A/2} = \frac{1}{abc}.s\sum 4R\text{Sin}^2\frac{A}{2}$$

$$= \frac{4Rs}{abc}\sum \text{Sin}^2\frac{A}{2} = \frac{s}{\Delta}\sum\frac{1-\text{Cos}A}{2} \qquad \left[\because \Delta = \frac{abc}{4R}\right]$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{1-\text{Cos}A}{2} + \frac{1-\text{Cos}B}{2} + \frac{1-\text{Cos}C}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{1-\text{Cos}A + 1-\text{Cos}B + 1-\text{Cos}C}{2}\right] = \frac{1}{r}\left[\frac{3-(\text{Cos}A+\text{Cos}B+\text{Cos}C)}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2r}\left[3-(\text{Cos}A+\text{Cos}B+\text{Cos}C)\right] \qquad \left[\because \text{Cos}A+\text{Cos}B+\text{Cos}C = 1+4\text{Sin}\frac{A}{2}\text{Sin}\frac{B}{2}\text{Sin}\frac{C}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2r}\left[3-\left(1+4\text{Sin}\frac{A}{2}\text{Sin}\frac{B}{2}\text{Sin}\frac{C}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2r}\left[2-4\text{Sin}\frac{A}{2}\text{Sin}\frac{B}{2}\text{Sin}\frac{C}{2}\right]$$

$$= \frac{2}{2r} - \frac{4\text{Sin}\frac{A}{2}\text{Sin}\frac{B}{2}\text{Sin}\frac{C}{2}}{2r} = \frac{1}{r} - \frac{4R\text{Sin}\frac{A}{2}\text{Sin}\frac{B}{2}\text{Sin}\frac{C}{2}}{2rR} = \frac{1}{r} - \frac{r}{2rR}$$

$$= \frac{1}{r} - \frac{1}{2R} = \text{RHS}$$

*****